

Trabajo Especial

Licenciatura en Física, opción Astronomía

Gastón Hugo Pereira

18 de septiembre de 2008

Dinámica secular en la Región Transneptuniana

Orientador: Dr. Tabaré Gallardo

Departamento de Astronomía
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Este trabajo, que de alguna manera es el cierre de una etapa que comenzó hace un largo tiempo atrás, no hubiera sido posible sin la ayuda y el apoyo de gente, que subiendo algunas y bajando otras en cada estación de este viaje, han dejado su huella al pasar y esas marcas aunque no plasmadas quizá en este trabajo, están latentes hoy que escribo estas líneas al finalizarlo. Pero seguramente nunca hubiera elegido este camino de no ser por mis viejos que me alentaron desde mi niñez a seguir aquello por lo que sintiera pasión. Les debo todo a ellos, cuyo esfuerzo hizo posible que en aquel año inolvidable yo pisara tímidamente y por mi cuenta, las calles de un ajeno Montevideo que hoy percibo tan diferente, tan cotidiano. Pero tampoco me quiero olvidar de mi tío, Rafael, de mi tía, Andrea que en aquella época me alojaron en su casa para que yo pudiera estudiar, desinteresadamente y sin tener la obligación de hacerlo, en un acto de generosidad que no olvidaré nunca. Y recordando aquel año, no me olvido de Cecilia, de aquellos veranos alejados de las playas para estudiar cálculo con Federico, Santiago, Matías, Sebastián y quizá alguno más de quien hoy no puedo acordarme, pero sin Cecilia, imposible.

El camino ha sido largo, y en ese recorrido, en los mejores momentos y en los más difíciles, siempre estuvo ahí Valentina, siempre, incondicionalmente, siempre, compañera. Federico que en la misma época estando lejos de casa los dos, fue un apoyo sin el cual hubieran sido tiempos mucho más difíciles aún.

Ya más próximo en el tiempo, apareció Pablo, quien compartió mucho de esta experiencia, trabajando junto a Tabaré y a mí en buena parte de lo que hoy está plasmado en estas páginas. Pero por sobre todo en incontables discusiones trasnochadas, por las calles de Montevideo, escuchando paciente y aportando ideas que fueron de a poco tomando forma y hoy están presentes en las páginas de este trabajo.

Mi hermano, Martín, que me aguantó durante años mi tremendo mal humor en épocas de exámenes, de escribir monografía tras monografía, a él le doy las gracias por estar siempre ahí. A mis amigos los bioquímicos Alvaro y Leo, siempre apoyando sobre todo en estos últimos tiempos.

Y por lo que han significado en esta última etapa, más que a nadie quiero agradecer a dos personas que quiero muchísimo y que son esos amigos que la vida pone enfrente de uno desafiando toda regla y toda ley; Diego, que emprendió este viaje desde la misma estación que yo y que hoy sigue estando, leyendo las páginas de este trabajo sin entender mucho pero igual con ganas, atento por compartir estas cosas a las que uno le ha dedicado tanto tiempo, hermano inseparable que me dio la vida. Y Denise, que llegó por azar en una sala de Cinemateca, y de quien nunca más quise separarme, a ella, dinámica, fugaz, crítica, hilarante, inteligente, sensible y bella, a ella, le dedico este trabajo.

Capítulo 1

Resumen

Mediante un desarrollo perturbativo del problema de n-cuerpos restringido es posible aproximar la dinámica de una partícula de masa despreciable, en interacción gravitatoria con el Sol y los demás planetas del Sistema Solar, por un Hamiltoniano medio con un único grado de libertad. Mediante esta aproximación y haciendo uso de la constancia a lo largo de la trayectoria del valor del Hamiltoniano de la partícula y otros parámetros como el semieje orbital a y la cantidad $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ hemos analizado esta dinámica a partir de curvas de nivel del Hamiltoniano medio calculado numéricamente; método conocido como diagrama de Kozai. En particular nos hemos centrado en el estudio de ciertos objetos en la región Transneptuniana, como los Centauros, cuyas órbitas originadas en la zona dominada por Neptuno (seguramente a partir de encuentros con éste), se encuentran actualmente en la zona interior al mismo y dominada por la interacción gravitacional con los planetas gigantes del Sistema Solar. Mostramos además un ejemplo de cómo cambia la dinámica en el caso de darse una conmensurabilidad entre los movimientos medios de la partícula y un planeta, conocido como resonancia de movimientos medios (MMR). En estos casos las variaciones en el perihelio de la partícula son mucho más pronunciadas que en el caso secular. Esta es una línea de trabajo abierta dado que hemos desarrollado un código para el caso resonante, ya que entender esta dinámica es de vital importancia en el estudio del Disco Dispersado debido a que la mayoría de los objetos en esta zona se encuentran en resonancias.

Capítulo 2

La Región Transneptuniana

La región Transneptuniana está conformada por objetos (TNOs) que se encuentran más allá de la órbita de Neptuno y que por baja densidad superficial no fueron capaces de acretar para formar planetesimales. Aquí se encuentra lo que se conoce como el Cinturón de Kuiper, una vasta zona repleta de cuerpos menores (KBOs) todos ellos reliquias del disco planetesimal primordial que dio origen al Sistema Solar. Reliquias en el entendido de que estos objetos guardan en su estructura física y dinámica registros de lo que fue la historia temprana de este sistema planetario.

2.1. Clasificación

La región transneptuniana (cuyos objetos se denominan TNO's) ha mostrado tener una compleja estructura dinámica a partir de la cual se han establecido ciertos criterios de clasificación.

Inicialmente se establecieron dos grupos:

1. El *Cinturón Clásico*, con objetos en órbitas *no resonantes*, con bajas excentricidades e inclinaciones, cuyos semiejes se encuentran comprendidos entre $42 \leq a \leq 48$.
2. Objetos en *resonancias de movimientos medios (MMR)* con Neptuno, dentro de los cuales los *Plutinos* (2:3) son los más numerosos, presentando las inclinaciones más altas. Son incluidos en este grupo además los objetos que se encuentran en la resonancia 1:2 con Neptuno.

Estos objetos se encuentran en una zona dinámicamente estable (figura 2.1). Simulaciones recientes (Lykavka 2006) establecen que el 91 % de los TNOs muestran variaciones en semieje promedio¹ menores a 0.1 UA, mientras que los cambios en excentricidad resultan en menos de 0.01 para el 93 % de la

¹Este promedio se calcula en base al mejor ajuste de la órbita real del objeto + 10 clones durante 10 Mys de simulación.

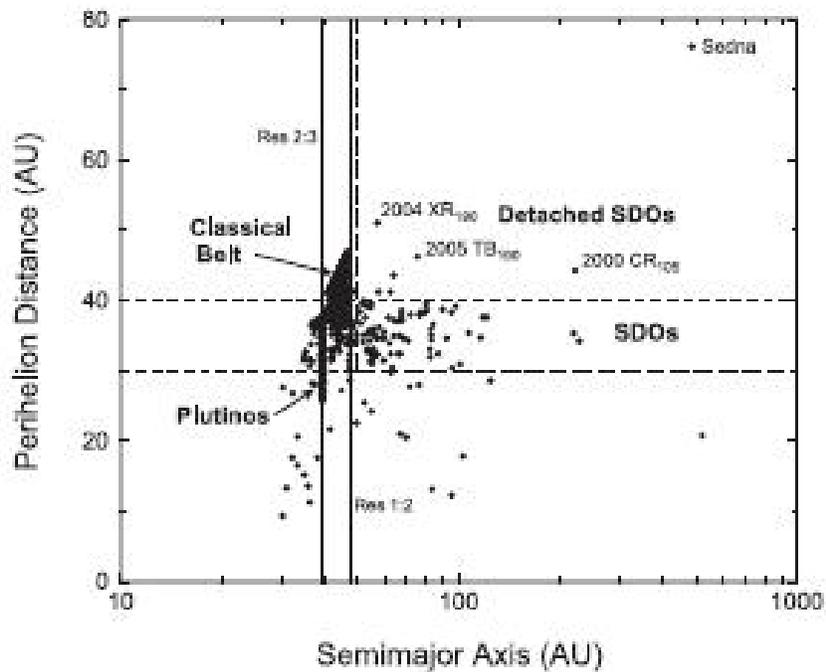


Figura 2.1: Distribución de diferentes poblaciones de objetos del sistema solar exterior en el plano a vs. q . Los objetos del disco dispersado ocupan la porción de arriba a la derecha. La zona de objetos dispersados de gran perihelio ($q < 40$ UA) también se indica, con los nombres de los objetos más destacados. Figura extraída de “The Solar System Beyond Neptune” Cap. 3 (Gomez et al.)

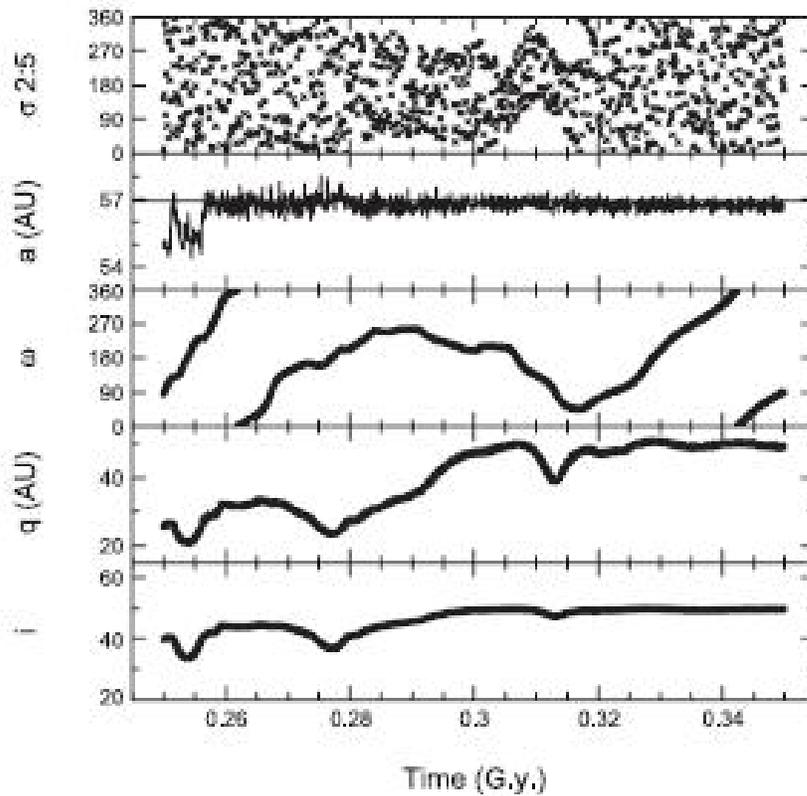


Figura 2.2: Evolución orbital de un SDO, capturado en la resonancia 2:5 (MMR) con Neptuno, experimentando el mecanismo de Kozai por cierto tiempo. La partícula abandona la resonancia durante la migración de Neptuno mientras la excentricidad es baja, quedando fosilizada cerca pero fuera de la resonancia 2:5. Figura extraída de: ídem figura 2.1

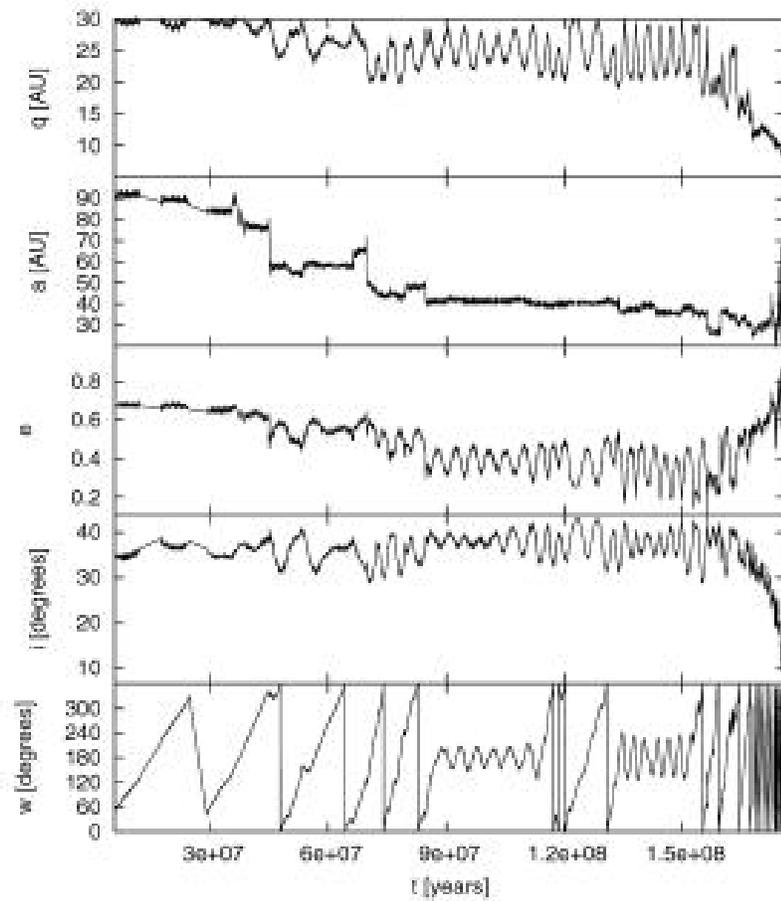


Figura 2.3: Evolución de un SDO ficticio hacia el estado transitorio denominado *Centaur*, con elementos orbitales iniciales $a = 100,99$ UA, $e = 0,692$, $i = 36,65^\circ$ y $q = 31,1$ UA. Se ve la transferencia entre el mecanismo de Kozai dentro y fuera de resonancias de movimientos medios (MMR). Figura extraída de Di Sisto et al. (2007)

población. Sin embargo existe una dispersión en los semiejes de los objetos que se encuentran por fuera de estos nichos estables, generada por la ocurrencia de encuentros con Neptuno; estos encuentros generan una lenta difusión tanto hacia adentro (*Centauros*) como hacia afuera del sistema solar.

El descubrimiento en 1996 del objeto TL_{66} (Lu. et al. 1997) fue el primer indicio observacional de la existencia del proceso de difusión hacia afuera. Esta subclase se denominó *Disco Dispersado* (*Scattered Disk* (SD)) y está conformado por aquellos objetos (SDO's) cuyos perihelios son mayores a 30 UA y sus semiejes superan las 50 UA.

2.2. Dinámica del Cinturón Transneptuniano

La dinámica en la región transneptuniana comprende básicamente dos tipos de evolución.

La primera, dominada por encuentros con los planetas exteriores, puede ser modelada como una evolución al azar en el semieje orbital pero alternando entre estados de evolución de a regulares debido al mecanismo conocido como *resonance sticking*. Naturalmente, debido a su carácter aleatorio, esta evolución es particularmente irregular por lo cual no existe un marco teórico a través del cual atacar este tipo de dinámica, presente no obstante en todo el sistema solar tanto en su extensión como a lo largo de la evolución del mismo desde sus orígenes; de hecho es conjeturable que su rol en la evolución del sistema solar no haya sido menor.

Sin embargo existe otro tipo de evolución, regular y periódica, que se da cuando la configuración orbital es tal que se evitan los encuentros cercanos con los planetas. Esta evolución es la que estudiaremos en este trabajo, mostrando las herramientas teóricas que existen para el tratamiento de este problema conocido como *problema de n -cuerpos restringido*. El tratamiento expuesto de manera detallada en el capítulo 2, tiene la ventaja de demostrar resultados cruciales para el estudio de esta dinámica como lo son las leyes de conservación, leyes que han mostrado ser desde las primeras etapas del desarrollo de la dinámica fundamentales en lo que hace a la comprensión de los problemas físicos. Esta dinámica en particular conserva el valor del semieje orbital, así como el valor de la energía de la partícula y predice una evolución acoplada de excentricidad e inclinación a través de la constancia del parámetro $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$, proporcional a la proyección del momento angular de la partícula según un eje perpendicular al plano definido por las órbitas de los planetas (supuestas en este modelo como circulares y coplanares). Es conocido en la literatura que aparecen grandes variaciones de excentricidad en los casos donde el argumento del perihelio se encuentra librando alrededor tanto de $\omega = 180^\circ$ como $\omega = 90^\circ$, resultado que se conoce comúnmente como mecanismo de Kozai (Kozai, 1962), ya que éste fue el

primero que realizó una aproximación similar para estudiar la evolución de objetos bajo la perturbación de Júpiter. Este tratamiento permite además comprender cómo la conmensurabilidad existente entre la partícula estudiada y alguno de los planetas, conocida como *resonancia de movimientos medios*, altera completamente la dinámica siendo necesario un tratamiento particular en estos casos, cuyo resultado se conoce como dinámica resonante a diferencia del caso anterior conocido como dinámica secular. No obstante la diferencia esencial entre las dos dinámicas, las leyes de conservación son similares, aunque no idénticas, apareciendo también grandes variaciones acopladas de excentricidad e inclinación en general mucho más pronunciadas, conociéndose esto como *mecanismo de Kozai resonante*. En este trabajo además de mostrar el formalismo existente para el tratamiento del problema de n-cuerpos restringido hemos implementado numéricamente el cálculo del Hamiltoniano promedio que surge del desarrollo antes mencionado, que corresponde a una aproximación a primer orden en las masas de los planetas respecto a la solar, y aplicado este código numérico a la región transneptuniana centrándonos en particular en el estudio de objetos susceptibles de presentar grandes variaciones en el perihelio como es el caso de objetos conocidos como Centauros. Implementamos además numéricamente el caso resonante y mostramos algún ejemplo, más no es el objetivo central de este trabajo el análisis de tal dinámica y por tanto no presentamos aquí una descripción detallada del cálculo numérico en este caso.

2.3. El Disco Dispersado (SD)

2.3.1. Configuración Orbital

Al representar gráficamente los perihelios de los objetos en función de sus semiejes (figura 2.1) aparece una marcada característica de los objetos pertenecientes al SD, y es que sus perihelios no se encuentran muy alejados de la órbita de Neptuno; esto seguramente se deba a que su origen está relacionado con los encuentros cercanos con este planeta, ya que en un encuentro cambia el módulo de la velocidad, mientras que la posición relativa permanece inalterada durante el mismo. Los semiejes mayores se encuentran distribuidos en un rango que va desde un poco más de 50 UA hasta 500 UA. Vale destacar que una cantidad sustancial de objetos se encuentran a más de 36 UA del Sol. La zona a la que pertenecen los objetos cuyos perihelios cumplen que $q > 40$ UA se conoce como *Disco Dispersado Extendido* (Gladman et al. 2002). Aunque la mayoría de ellos no poseen semiejes mucho mayores que 50 UA, dos de ellos (Sedna y 2000CR₁₀₅) tienen semiejes superiores a las 200 UA. Las inclinaciones de los objetos del SD pueden ir desde 0,2° hasta valores como el de un objeto observado recientemente (Gladman et al., 2008) con 109° aproximadamente. Las altas inclinaciones pueden ser logradas mediante encuentros con Neptuno, o como se verá más adelante, a

través del mecanismo de Kozai dentro de una resonancia de movimientos medios.

2.3.2. Migración a lo largo del Disco Planetesimal

La estructura dinámica de esta región se encuentra en estrecha relación con lo que fue la historia temprana del nuestro Sistema Solar. Fernandez & Ip (1984) mostraron por primera vez, a partir de simulaciones de acreción en el disco primordial, la posibilidad de que las órbitas de los planetas gigantes puedan haber cambiado significativamente; ellos mostraron que a medida que los planetas gigantes fueron dispersando gravitacionalmente a los planetesimales residuales, estos podían intercambiar momento angular entre sí con el resultado de que las órbitas de los planetas derivaran paulatinamente. Malhotra (1993) establece que una migración de Neptuno hacia afuera con una variación en semieje de al menos $\Delta a \approx 5UA$ podía dar cuenta de la peculiar órbita de Plutón, el cual reside dentro de la resonancia 2 : 3 con Neptuno y una excentricidad de $e \approx 0,25$. El conocimiento acerca de la proporción de objetos en las resonancias 3 : 2 y 2 : 1 puede restringir las velocidades de migración (Melita & Brunini, 2000; Chiang & Jordan 2002).

2.3.3. El Scattered Disk de gran Perihelio (HPSD)

Existen actualmente numerosos objetos de alto perihelio en el Scattered Disk; es decir objetos con $a > 50 UA$ y $q > 40 UA$. Algunos de estos objetos como por ejemplo 2003 VB₁₂ (Sedna) plantean serias interrogantes ya que no es posible explicar sus órbitas por medio de los mecanismos conocidos que permiten elevar el perihelio de una partícula. El principal y más eficiente mecanismo para elevar el perihelio de una partícula parece ser el de Kozai dentro de una resonancia de movimientos medios, como muestran Gomes et al. (2005); estos autores muestran en base a ejemplos a través de simulaciones numéricas complementadas con mapas de Kozai (es decir curvas de nivel del Hamiltoniano medio de la partícula), tanto seculares como resonantes, que debido a la migración de Neptuno, es posible que un objeto inicialmente fuera de una resonancia, sea capturada por la misma cambiando drásticamente la forma del Hamiltoniano medio cuyas curvas de nivel muestran que como resultado de esta dinámica el objeto es capaz de elevar su perihelio para luego quedar “fosilizado” en este valor una vez que se rompe la condición resonante debido a la migración (figura 2.2). Este mecanismo, respaldado por simulaciones numéricas sugiere que es posible que ciertos objetos con altos valores de perihelio que se encuentran fuera de resonancia alguna hayan llegado sin embargo a este estado debido al mecanismo de Kozai dentro de una resonancia de movimientos medios durante la migración de Neptuno.

Estos resultados se condicen con otros obtenidos mediante simulaciones de migración planetaria en un disco inicialmente excitado (Hahn & Mal-

hotra 2005), es decir con valores medios de excentricidad e inclinación del orden de $\langle e \rangle = 0,1$ y $\langle \sin i \rangle = \langle e \rangle / 2$ en lugar de los valores usuales en discos inicialmente “fríos” $\langle e \rangle = 0,001$, $\langle \sin i \rangle = \langle e \rangle / 2$. Este tipo de simulación reproduce con mucho mayor precisión la distribución orbital en los planos (e, a) y (i, a) . Estos autores utilizan un método basado en la *integral B de Browner* (Browner 1963) mediante el cual es posible distinguir entre objetos capturados en resonancia y objetos dispersados. La integral es conservada para partículas capturadas mientras que no lo es para objetos dispersados que exhiben temporariamente el fenómeno de “resonance sticking”. El resultado es que el 10 % de las partículas en su simulación son realmente objetos dispersados. Es más el 90 % de las partículas simuladas que persisten por la edad del Sistema Solar nunca llegaron a experimentar un encuentro con Neptuno sino que llegaron a esas órbitas excéntricas a través de resonancias con Neptuno durante la migración. Esto indicaría que el Scattered Disk o Cinturón Dispersado podría no ser tanto.

2.3.4. Centauros

Los Centauros pertenecen a otra clase de objetos en tránsito entre la zona exterior a la órbita de Neptuno y la interior bajo el dominio gravitacional de los planetas gigantes. No existe una definición de lo que es un Centauro; algunos autores llaman Centauros a los objetos no-resonantes cuyas órbitas poseen un valor de $q < 30,1UA$ (Lykawka & Mukai, 2007). Otro criterio utilizado es a través del parámetro de Tisserand (T) con respecto a Júpiter siendo $T > 3$ y $a > a_J$ siendo a_J el semieje mayor de Júpiter.

La figura 2.3 obtenida de Di Sisto et al. (2007) muestra la evolución de un objeto perteneciente al SD que debido a múltiples encuentros con Neptuno, alternando con una evolución regular donde la partícula experimenta el mecanismo de Kozai dentro y fuera de resonancias de movimientos medios, disminuye su perihelio ingresando a una zona dominada por los planetas gigantes del Sistema Solar. Han habido intentos de caracterizar esta población de manera detallada, sin embargo debido a la aleatoriedad que introducen los encuentros con los planetas, sumado al hecho de que los estudios se basan en integraciones numéricas se hace sumamente difícil obtener un panorama claro de la situación.

Capítulo 3

Desarrollo analítico de la aproximación del Hamiltoniano

Utilizando el formalismo Hamiltoniano y la Teoría de Perturbaciones como herramienta fundamental, presentamos un tratamiento analítico basado en (Morvidelli) mediante el cual es posible encontrar una aproximación a primer orden en las masas de los planetas respecto a la del Sol, de la dinámica de una partícula sometida a la perturbación gravitacional del Sol y los planetas del Sistema Solar. Estos resultados, es decir el Hamiltoniano aproximado, fue utilizado numéricamente a los efectos de estudiar la dinámica resultante en la Región Transneptuniana.

3.1. El Problema de N-Cuerpos Restringido

En un sistema de referencia inercial baricéntrico, considérese un conjunto de $N + 1$ masas con simetría esférica que interactúan a través de la fuerza gravitatoria de Newton y que designamos m_0 (Sol) y N masas m_1, m_2, \dots, m_N (planetas). Las ecuaciones de movimiento tienen la forma:

$$\ddot{u}_i = -\mathcal{G} \sum_{j \neq i} m_j \frac{u_i - u_j}{|u_i - u_j|^3}, \quad u_i \in R^3, \quad i, j = 0 \dots N \quad (3.1)$$

Introduciendo las posiciones heliocéntricas de los planetas $r_i = u_i - u_0$ (u_0 es la posición baricéntrica del Sol) las ecuaciones pueden ser escritas como

$$\ddot{r}_i = -\frac{\mathcal{G}(m_0 + m_i)}{|r_i|^3} r_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \mathcal{G} m_j \left(\frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} - \frac{r_j}{|r_j|^3} \right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

Dado que las coordenadas u_i son baricéntricas, definiendo ξ como el baricentro del sistema, se cumple

$$\xi = \frac{\sum_{i=0}^N m_i u_i}{\sum_{i=0}^N m_i} = 0,$$

haciendo uso de esta relación se obtiene la posición baricéntrica del Sol en función de las coordenadas heliocéntricas de los N planetas

$$u_0 = - \sum_{i=1}^N \frac{m_i r_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, \quad (3.3)$$

El sistema compuesto por 3.2 y 3.3 se conoce como *problema de $N + 1$ cuerpos*.

De manera similar, las ecuaciones de movimiento heliocéntricas de un cuerpo de *masa despreciable* sometido a las fuerzas gravitacionales del Sol y los N planetas cuyas *órbitas están dadas* es

$$\ddot{r} = - \frac{\mathcal{G}m_0}{|r|^3} r + \sum_{j=1}^N \mathcal{G}m_j \left(\frac{r_j - r}{|r_j - r|^3} - \frac{r_j}{|r_j|^3} \right), \quad (3.4)$$

y es conocido como *problema de N -cuerpos restringido*.

El término de la derecha, proporcional a las masas de los planetas, actúa como una perturbación respecto del primer término que no es otra cosa que la aceleración producida sobre la partícula sin masa debida al objeto central, esto es el problema de dos cuerpos (apéndice A), es decir que el problema de N cuerpos restringido se presenta como una perturbación al problema de Kepler, donde la fuerza de esta perturbación respecto al problema original es proporcional a las masas de los planetas respecto a la del objeto central. El primer término de esta perturbación está asociado a la fuerza que los planetas ejercen sobre la partícula y se conoce como *término directo*, mientras que el segundo término actúa sobre el objeto central por lo que se le conoce como *término indirecto*. Si las masas de los planetas son pequeñas comparadas con la del Sol, y ninguna de las distancias mutuas $r_j - r_i$ tiende a cero, las ecuaciones 3.2 y 3.4 son cercanas a la ecuación del problema de 2-cuerpos que describe la interacción de un objeto con el Sol. Por lo tanto el movimiento resultante de las ecuaciones 3.2 y 3.4 será muy cercano al descrito por las leyes de Kepler, resultando en variaciones de los elementos orbitales que en el problema de Kepler son constantes.

Es inmediato verificar que el término perturbativo proporcional a las masas de los planetas se puede derivar de un potencial cuya forma es

$$U(r) = - \frac{\mathcal{G}m_0}{r} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{r \cdot r_j}{r_j^3} \right) \quad (3.5)$$

Donde $r \cdot r_j$ es el producto interno entre los vectores r y r_j , mientras que $\Delta_j = |r_j - r|$.

3.1.1. Formulación Hamiltoniana del problema de N - cuerpos restringido

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias del tipo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

se dice en *forma hamiltoniana* si \mathbf{r} es una $2n$ -upla, y designando x_1, \dots, x_n y v_1, \dots, v_n sus $2n$ componentes, existe una función $\mathcal{H}(v_1, \dots, v_n, x_1, \dots, x_n)$ tales que las ecuaciones pueden ser reescritas como

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial v_i} \quad (3.7)$$

para $i = 1, \dots, n$. La función \mathcal{H} se llama *Hamiltoniano* del sistema y las variables x_1, \dots, x_n y v_1, \dots, v_n se llaman respectivamente *coordenadas* y *momentos*. En general se adopta el formalismo vectorial en el cual \mathbf{x} corresponde a la n -upla x_1, \dots, x_n mientras que \mathbf{v} corresponde a v_1, \dots, v_n de modo que (\mathbf{x}, \mathbf{v}) constituye lo que se conoce como *espacio de fases*.

Las ecuaciones del tipo

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla U(\mathbf{r}),$$

pueden ser escritas en la forma A.1 como es inmediato verificar definiendo $x_i = r_i$, es decir las coordenadas del vector \mathbf{r} , y $v_i = \dot{r}_i$ con un Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + U(\mathbf{r})$$

Con el potencial encontrado en 3.5 el Hamiltoniano del sistema de N-cuerpos se puede escribir como

$$\mathcal{H} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_0}{r} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{r \cdot r_j}{r_j^3} \right) \quad (3.8)$$

En coordenadas cartesianas $r = (r_1, r_2, r_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ tales que $v = \dot{r}$.

$$\mathcal{H}_0 = \frac{v^2}{2} - \frac{\mathcal{G}m_0}{r},$$

es la parte del Hamiltoniano independiente de la posición de los planetas, que corresponde al problema central de dos cuerpos. Es decir que se puede

escribir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, siendo

$$\mathcal{H}_1 = -\mathcal{G} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{r \cdot r_j}{r_j^3} \right) \quad (3.9)$$

la perturbación respecto al problema central de dos cuerpos.

El Hamiltoniano 3.8 depende del tiempo ya que el movimiento de los planetas no se obtiene como solución a las ecuaciones de movimiento en el problema restringido, sino que las órbitas de los mismos se asumen conocidas. Este tipo de Hamiltoniano se conoce como *no-autónomo* y tiene la forma $\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$. La mayoría de los resultados de la teoría de Hamiltonianos tienen como hipótesis que el mismo sea autónomo, lo cual dificultaría el tratamiento en este caso. Sin embargo es posible transformar este Hamiltoniano en uno autónomo gracias a la periodicidad de las órbitas de los planetas. Para ello basta introducir el tiempo a través de variables canónicas conjugadas (τ_i, Γ_i) cuyas *coordenadas* ($\tau_i = n_i t$), representan los ángulos que determinan la posición de los planetas en sus órbitas; es decir que n_i son los movimientos medios, es decir $n_i = \frac{2\pi}{T_i}$ con T_i el período de cada planeta. Se construye de esta manera un nuevo Hamiltoniano

$$\mathcal{H}' = \sum_i^n n_i \Gamma_i + \mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, \tau_i). \quad (3.10)$$

Es inmediato verificar lo antedicho, es decir que $\dot{\tau}_i = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \Gamma_i} = n_i$.

Resuelto el problema de la no autonomía del Hamiltoniano original, resulta que las variables (r, v) no son las más adecuadas para una clara descripción del movimiento de la partícula, ya que al ser el Hamiltoniano el resultado de una perturbación (de orden $\epsilon = m_j/m_0$) respecto del *problema de dos cuerpos* (ver apéndice A), el movimiento resultante será entorno a la solución de éste último para tiempos no muy largos. En el problema de dos cuerpos, los *elementos orbitales* a, e, i, M, ω y Ω , respectivamente el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación (evaluada con respecto al plano invariable del Sistema Solar), la anomalía media, el argumento del perihelio y la longitud del nodo, determinan el estado de la partícula en un tiempo dado. Es por esta razón que resulta conveniente buscar *variables canónicas* para el problema de N cuerpos restringido que se expresen en términos de los elementos orbitales y que permitan entender con mayor claridad la evolución secular de la órbita de una partícula. Estas variables se conocen como *variables de Delaunay*.

3.1.2. Ecuaciones de Hamilton en variables de Delaunay

Mostramos aquí el tratamiento seguido por Thomas & Morbidelli (1996). Elegimos unidades en las cuales la constante $\mathcal{G} = 1$ y la masa del Sol $m_0 = 1$,

es decir que expresamos las masas m_j en unidades de masa solar. Con esta elección el Hamiltoniano (3.8) resulta

$$\mathcal{H} = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{r} - \mathcal{G} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{1}{\Delta_j} - \frac{r \cdot r_j}{r_j^3} \right). \quad (3.11)$$

Definimos las *variables ángulo-acción*, conocidas como las *variables de Delaunay*¹

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a}, & l &= M, \\ G &= L\sqrt{1-e^2}, & g &= \omega, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$H = L \cos i, \quad h = \Omega, \quad (3.13)$$

En estas variables el Hamiltoniano queda expresado como

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2L^2} + \sum_{j=1,N} n_j L_j + \sum_{j=1,N} \mathcal{P}_j(L, G, H, l, g, h, l_j). \quad (3.14)$$

Nótese que se ha introducido el tiempo a través de las variables l_j antes denominadas genéricamente τ_i y sus canónicas conjugadas L_j . De este modo el Hamiltoniano queda expresado nuevamente como la suma de dos términos $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ donde

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2L^2} + \sum_{j=1,N} n_j L_j, \quad (3.15)$$

mientras que la perturbación queda expresada como la suma de las perturbaciones debidas a los N planetas.

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{j=1,N} \mathcal{P}_j(L, G, H, l, g, h, l_j) \quad (3.16)$$

Para evitar las singularidades aparentes que ocurren ya sea cuando i así como e son iguales a cero, es que se definen comúnmente las *variables modificadas de Delaunay*

$$\Lambda = L, \quad \lambda = l + g + h, \quad (3.17)$$

$$P = L - G, \quad p = -g - h, \quad (3.18)$$

$$Q = G - H, \quad q = -h, \quad (3.19)$$

La perturbación \mathcal{H}_1 es periódica en los ángulos l, g, h, l_j , con lo cual es posible realizar una expansión en series de Fourier de los ángulos λ, p, q .

¹Para un tratamiento completo de la construcción de las variables ángulo-acción y las variables de Delaunay ver Morbidelli, *Modern Celestial Mechanics*, Cap 1.9

Partiendo de esta expansión es posible buscar nuevas variables a través de una transformación canónica, por medio de un procedimiento perturbativo, en las cuales el Hamiltoniano original es aproximado a primer orden en las masas de los planetas respecto a la masa del objeto central (Sol), por un Hamiltoniano *integrable*, es decir que no dependa de las variables Λ , P y Q .

3.2. Aproximación del Hamiltoniano

3.2.1. Introducción a la Teoría de Perturbaciones

Un Hamiltoniano se dice *integrable* cuando al expresarlo en variables ángulo-acción $J = (J_1, \dots, J_n)$ y $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, éste sólo depende de las variables de acción, es decir

$$\mathcal{H}(J, \theta) = \mathcal{H}_0(J) \quad (3.20)$$

con lo cual al resolver las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{J}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i} = 0 \\ \dot{\theta}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i} = \omega_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} J_i &= cte \\ \theta_i(t) &= \omega_i t + \theta(0) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Llamaremos

$$\omega_0 = (\omega_1, \dots, \omega_n) = \nabla_J \mathcal{H}_0$$

al vector que contiene las frecuencias fundamentales del Hamiltoniano integrable ya que esto será de utilidad más adelante. Un sistema Hamiltoniano se dice *cuasi-integrable* si, utilizando un conjunto de variables ángulo-acción, su Hamiltoniano puede ser escrito como

$$\mathcal{H}(J, \theta) = \mathcal{H}_0(J) + \epsilon \mathcal{H}_1(J, \theta) \quad (3.23)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño, de manera que \mathcal{H}_0 se interpreta como la *aproximación integrable* y \mathcal{H}_1 su perturbación. La ventaja del formalismo Hamiltoniano es que permite a través de un desarrollo perturbativo, trabajar directamente sobre la función que genera la dinámica aplicando los resultados que predice la teoría, en lugar de manejar desarrollos en las propias ecuaciones de movimiento. El procedimiento general en teoría de perturbaciones para sistemas Hamiltonianos es buscar transformaciones canónicas *cercanas a la identidad* o infinitesimales de la forma

$$J = J^1 + \epsilon f_1(J^1, \theta^1), \quad \theta = \theta^1 + \epsilon g_1(J^1, \theta^1), \quad (3.24)$$

tales que al sustituir 3.24 en 3.23 resulta

$$\mathcal{H}^1(J^1, \theta^1) = \mathcal{H}_0(J^1) + \epsilon \mathcal{H}_1^*(J^1) + \epsilon^2 \mathcal{H}_2^*(J^1, \theta^1). \quad (3.25)$$

Si es posible encontrar están nuevas funciones, entonces $\mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1^*$ es la aproximación a primer orden de la verdadera dinámica. En general este procedimiento puede ser utilizado para obtener una aproximación del orden deseado (ϵ^r) iterando una secuencia de transformaciones infinitesimales, mas este no es nuestro objetivo, de manera que estaremos satisfechos con una aproximación a primer orden, es decir con un error de orden ϵ^2 .

3.2.2. Enfoque mediante Series de Lie

La dificultad central en el procedimiento mostrado en la sección anterior es la de elegir de las transformaciones que llevan el Hamiltoniano 3.23 en el 3.25 aquella en la cual las nuevas variables (J^1, θ^1) sean canónicas. No obstante esto se logra eligiendo una transformación infinitesimal que sea canónica por construcción. Las transformaciones canónicas infinitesimales son un tipo de transformación que utilizan un Hamiltoniano generados para construir nuevas variables a través del flujo de este Hamiltoniano que designaremos χ . Las variables (J, θ) son expresadas entonces como la evolución a través del Hamiltoniano χ de las nuevas variables (J^1, θ^1) de la siguiente manera

$$J = \mathcal{S}_\chi^\epsilon J^1, \quad \theta = \mathcal{S}_\chi^\epsilon \theta^1, \quad (3.26)$$

donde $\mathcal{S}_\chi^\epsilon$ es el operador de series de Lie definido en el apéndice C, y como se dijo anteriormente este tipo de transformación es siempre una transformación canónica ya que las nuevas variables se construyen en base a la evolución de un Hamiltoniano. Como el Hamiltoniano $\mathcal{H}^1(J^1, \theta^1)$ se construye por sustitución formal de las variables (J, θ) en \mathcal{H} es claro que

$$\mathcal{H}^1(J^1, \theta^1) \equiv \mathcal{H}(J^1(\epsilon), \theta^1(\epsilon)) \quad (3.27)$$

de manera que este aparece como la evolución a tiempo ϵ del Hamiltoniano $\mathcal{H}(J^1, \theta^1)$ a lo largo del flujo generado por el Hamiltoniano χ . Por lo tanto es claro que el Hamiltoniano \mathcal{H} puede escribirse a partir de las series de Lie mediante la expresión

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{S}_\chi^\epsilon \mathcal{H}. \quad (3.28)$$

Con lo cual el problema se reduce a buscar un Hamiltoniano generador χ tal que si \mathcal{H} tiene la forma 3.23, entonces \mathcal{H}^1 tenga la forma 3.25.

A estos efectos escribimos la ecuación 3.28 explícitamente utilizando los resultados del apéndice C, hasta un orden ϵ^2

$$\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}_0 + \epsilon \mathcal{H}_1 + \epsilon \{\mathcal{H}_0, \chi\} + \epsilon^2 \{\mathcal{H}_1, \chi\} + \frac{\epsilon^2}{2} \{\{\mathcal{H}_0, \chi\}, \chi\} + O(\epsilon^3). \quad (3.29)$$

Recordamos que en esta ecuación $\{f, g\}$ es el *Corchete de Poisson* entre las funciones $f(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ y $g(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, donde (\mathbf{p}, \mathbf{q}) son variables canónicas conjugadas, donde este corchete es definido por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}.$$

En la expresión 3.29 las funciones \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 y χ deben ser evaluadas en (J^1, θ^1) . A partir de esta expresión se ve que el término de orden cero en ϵ es $\mathcal{H}_0(J^1)$; por lo tanto \mathcal{H}^1 tendrá la forma buscada en 3.25 *si y solo si* el término de primer orden en ϵ es una función únicamente de las acciones J^1 ; esto se cumple si y solo si la ecuación

$$\mathcal{H}_1 + \{\mathcal{H}_0, \chi\} = \mathcal{H}_1^*, \tag{3.30}$$

conocida como *ecuación homóloga* es satisfecha por dos funciones $\chi(J^1, \theta^1)$ y $\mathcal{H}_1^*(J^1)$. Es aquí donde aparece la utilidad de las variables ángulo-acción, ya que en estas variables las coordenadas q son ángulos, con lo cual el Hamiltoniano \mathcal{H}_1 , al ser periódico admite un desarrollo en series de Fourier, es decir que \mathcal{H}_1 se puede escribir como

$$\mathcal{H}_1(J, \theta) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} c_{\mathbf{k}}(J) \exp^{i\mathbf{k} \cdot \theta} \tag{3.31}$$

El hecho de tener \mathcal{H}_1 expresado como un desarrollo en series de Fourier, y dado que tenemos una ecuación que debe satisfacer el Hamiltoniano generador χ sugiere que si expresamos χ también mediante una expansión en series de Fourier, entonces deberíamos encontrar alguna condición que deban cumplir los coeficientes de dicha expansión. Consideremos entonces una expresión para χ

$$\chi(J^1, \theta^1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} d_{\mathbf{k}}(J^1) \exp^{i\mathbf{k} \cdot \theta^1} \tag{3.32}$$

y de esta manera es posible calcular el corchete de Poisson

$$\{\mathcal{H}_0, \chi\} = -i \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} d_{\mathbf{k}}(J^1) (\mathbf{k} \cdot \omega_0(J^1)) \exp^{i\mathbf{k} \cdot \theta^1}. \tag{3.33}$$

Aquí nuevamente aparece el vector $\omega_0 = \nabla_{J^1} \mathcal{H}_0$ cuyos elementos son las frecuencias fundamentales que hacen a la periodicidad del Hamiltoniano. De la ecuación 3.30 se desprende que

$$\mathcal{H}_1^*(J^1) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} [c_{\mathbf{k}}(J^1) - i d_{\mathbf{k}}(J^1) (\mathbf{k} \cdot \omega_0(J^1))] \exp^{i\mathbf{k} \cdot \theta^1}$$

y al no poder depender $\mathcal{H}_1^*(J^1)$ de las variables angulares y ser las funciones exponenciales ortonormales, necesariamente los coeficientes de la expansión

deben ser nulos excepto para el caso en el cual el vector \mathbf{k} es el vector nulo. Los coeficientes de la expansión de χ son por lo tanto

$$d_0 = 0, \quad d_{\mathbf{k}}(J^1) = -i \frac{c_{\mathbf{k}}(J^1)}{k \cdot \omega_0(J^1)}, \quad \forall \mathbf{k} \neq \vec{0}, \quad (3.34)$$

Con lo cual la aproximación integrable está dada simplemente por el primer término de la expansión en series de Fourier del Hamiltoniano \mathcal{H}_1 , es decir

$$\mathcal{H}_1^*(J^1) = c_0(J^1). \quad (3.35)$$

Es decir que si asumimos una descomposición en series de Fourier para \mathcal{H}_1 dada por la ecuación 3.31 con coeficientes $c_{\mathbf{k}}(J^1)$ dados por

$$c_{\mathbf{k}}(J) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(J, \theta) \exp^{-i\mathbf{k} \cdot \theta} d\theta_1 \dots d\theta_n, \quad (3.36)$$

entonces el término $c_0(J^1)$ está dado por

$$c_0(J^1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(J, \theta) d\theta_1 \dots d\theta_n. \quad (3.37)$$

De las ecuaciones y se concluye que *la aproximación integrable \mathcal{H}_1^* es el promedio del Hamiltoniano original respecto de las variables angulares*. Sin embargo hemos de preguntarnos si esta transformación generada por χ es realmente posible, ya que la solución para sus coeficientes en el desarrollo en series de Fourier dado por 3.34 advierte que no siempre es posible definir este Hamiltoniano; de hecho los coeficientes $d_{\mathbf{k}}$ divergen siempre que se anule su denominador. Esto sucedería para aquellos valores del vector \mathbf{k} tales $\mathbf{k} \cdot \omega_0 = 0$. Esta singularidad es lo que se define como resonancia de movimientos medios (MMR) y ocurre siempre que exista alguna conmensurabilidad entre los movimientos medios de la partícula y algún planeta; esto quedará claro a continuación.

3.2.3. Promediando en Anomalías Medias

Para analizar con más detalle el problema del denominador en el Hamiltoniano generador conviene desarrollar la expresión 3.31 para el problema restringido expresado en variables modificadas de Delaunay, en efecto

$$\mathcal{H}_1 = \sum_j \sum_{k, k_j, m, m_j, s, s_j} c_{k, k_j, m, m_j, s, s_j}^{(j)}(\Lambda, P, Q) \exp^{i(k\lambda + k_j \lambda_j + mp + m_j p_j + sq + s_j q_j)} \quad (3.38)$$

con esto el Hamiltoniano χ será

$$\chi = \sum_j \sum_{k, k_j, m, m_j, s, s_j} -i \frac{c_{k, k_j, m, m_j, s, s_j}^{(j)}(\Lambda^1, P^1, Q^1)}{k \frac{1}{(\Lambda^1)^3} + k_j n_j} \exp^{i(k\lambda^1 + k_j \lambda_j^1 + mp^1 + m_j p_j^1 + sq^1 + s_j q_j^1)}. \quad (3.39)$$

En esta expresión queda claro lo antedicho respecto de la divergencia de χ y es que esto se produce en los casos donde

$$k \frac{1}{(\Lambda^1)^3} + k_j n_j = 0,$$

condición que se verifica para dos casos bien distintos; el primero es el mencionado antes, es decir el caso en que exista una conmensurabilidad entre los movimientos medios de la partícula y un planeta, condición conocida como *Resonancia de Movimientos Medios* (MMR). El segundo caso es el trivial que se cumple para aquellos armónicos en los cuales las constantes k y k_j se anulan simultáneamente.

El primer caso es problemático ya que las resonancias de movimientos medios ocupan densamente el espacio de fases; sin embargo esta dificultad puede evitarse formalmente restringiéndose a una zona del espacio de fases donde la “fuerza” de la resonancia es débil (Gallardo 2006), en estos casos nos referiremos de aquí en más a la aproximación *secular o no-resonante*. El segundo caso es inevitable, por lo que es necesario analizarlo en detalle; la conclusión será que debido a esta dificultad no será posible conseguir un Hamiltoniano completamente integrable, debido a la imposibilidad de eliminar aquellos armónicos para los cuales k y k_j se anulan simultáneamente, siendo la mejor aproximación a segundo orden el promedio de la perturbación \mathcal{H}_1 en los ángulos “rápidos” que son las anomalías medias de la partícula λ y de los planetas perturbadores λ_j . Procedamos entonces al cálculo de la aproximación a segundo orden en las masas del Hamiltoniano del problema de n-cuerpos restringido.

Debido a lo antedicho es necesario expresar \mathcal{H}_1 de una manera alternativa que haga aparecer explícitamente los armónicos “problemáticos”

$$\mathcal{H}_1 = \sum_j \sum_{k, k_j} c_{k, k_j}^{(j)}(J, \theta) \exp^{i(k\lambda + k_j \lambda_j)}, \quad (3.40)$$

nótese que esto siempre es posible mediante una re definición de las constantes c_{k, k_j} . Por lo tanto la mejor aproximación del Hamiltoniano original a primer orden en el parámetro ϵ de la perturbación es

$$\bar{\mathcal{H}} = \sum_j i_{00}^{(j)} = \sum_j \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1(J, \theta, \lambda, \lambda_j) d\lambda d\lambda_j.$$

Expresión que se conoce comúnmente como “promedio en los ángulos rápidos”.

Persiste entonces una dependencia en $g = \omega$ y $h = \Omega$. Mas la dependencia en Ω puede ser eliminada debido a que al asumir las órbitas de los planetas como circulares, el Hamiltoniano no puede depender de la longitud del nodo Ω que es la dirección en que la órbita de la partícula corta a la del planeta.

Por lo tanto la aproximación designada por *Hamiltoniano promedio* es en efecto

$$\bar{\mathcal{H}}(g, L, G, H) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1, N} m_j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_j(\lambda, g, L, G, H, \lambda_j) d\lambda d\lambda_j. \quad (3.41)$$

Que es independiente de Ω ya que hemos asumido como *hipótesis que las órbitas de los planetas, que están dadas de antemano, son coplanares y circulares*. Por lo tanto una vez calculada la integral 3.4, la dinámica de la partícula en el sistema solar sometida a la perturbación de los planetas puede estudiarse a partir del Hamiltoniano promedio $\bar{\mathcal{H}}(g, L, G, H)$ que depende de $g = \omega, L = \sqrt{a}, G = \sqrt{a(1 - e^2)}$ y $H = \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i$. Sin embargo este problema posee únicamente dos grados de libertad a través de (g, G) ya que por ser esta perturbación independiente de l , su variable canónica conjugada L debe ser necesariamente constante. Podemos asegurar entonces que el semieje $a = L^2$ debe ser (en esta aproximación) una constante del movimiento. Lo mismo sucede con H a través de la independencia del Hamiltoniano de la variable Ω , la longitud del nodo ascendente. Debido a que a es una constante **redefiniremos** la variable H como

$$H = \sqrt{1 - e^2} \cos i, \quad (3.42)$$

ya que esta es también constante y aparece más frecuentemente en la literatura. También definimos la variable $X = \sqrt{1 - e^2}$ que no es otra cosa que G/L .

Por lo tanto podemos estudiar el movimiento de la partícula utilizando H y a como parámetros, independientemente de Ω que no afecta el comportamiento, mientras que la partícula evolucionará variando (ω, X) pero manteniendo a su vez constante el valor del Hamiltoniano promedio.

Como veremos en el capítulo siguiente, al analizar los resultados de este trabajo, es posible estudiar la dinámica en el subespacio (ω, X) , por ejemplo mediante curvas de nivel del Hamiltoniano promedio $\bar{\mathcal{H}}(g, L, G, H)$ ya que este es constante a lo largo de la trayectoria de la partícula. Este enfoque se conoce en general como “diagramas de Kozai” debido a Kozai (1962) quien fue el primero en utilizar este tipo de análisis.

En este trabajo se utilizará frecuentemente el subespacio (ω, q) , siendo $q = a(1 - e)$ ya que este es un buen parámetro en el estudio del Scattered Disc.

3.3. Cálculo del Hamiltoniano promedio

Designemos $\lambda' = \lambda_j$ a la anomalía media del planeta j ya que el procedimiento es el mismo para todos. Podemos expresar este cálculo como

$$\bar{\mathcal{H}} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^{-1} d\lambda d\lambda' \quad (3.43)$$

Nótese que a los efectos del cálculo numérico de la integral se ha vuelto a expresar la perturbación en su forma original 3.9, eliminando a su vez el *término indirecto* (ver sección 3.1) ya que fijada la posición de la partícula este termino depende únicamente de la anomalía media del planeta, por lo tanto la integral en un ciclo es nula.

La integral 3.4 sobre λ' se puede calcular analíticamente, debido a que las órbitas de los planetas son consideradas circulares y con inclinación nula, por medio de la integral elíptica \mathbf{K} del primer tipo (Bailey *et al.*, 1992). Bajo estas hipótesis

$$\int_0^{2\pi} \Delta^{-1} d\lambda' = 2k\mathbf{K}(k)/\sqrt{a'\rho} \quad (3.44)$$

donde $k = 2(a'\rho)^{1/2}/[(\rho+a')^{1/2} + z^2]$ y (ρ, z) son respectivamente las coordenadas cilíndricas de la partícula a una distancia heliocéntrica $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Con estas definiciones tenemos

$$\overline{\mathcal{H}}^* = \frac{2m'}{\pi^2} a^* \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{K}(k)}{[(1 + \rho^*)^2 + (z^*)^2]^{1/2}} d\lambda \quad (3.45)$$

donde hemos introducido la notación en la cual una variable $*$ significa la misma dividida entre a' el semieje del planeta, mientras que $\overline{\mathcal{H}}^* = \overline{\mathcal{H}}/\mathcal{H}_0$.

Para evaluar numéricamente la integral 3.45 es útil realizar un cambio de variable a los efectos de que aparezca la anomalía verdadera f por medio de la relación

$$d\lambda = \frac{(r^*)^2 df}{(a^*)^2 \sqrt{1 - e^2}}$$

con lo cual

$$\overline{\mathcal{H}}^* = \frac{2m'}{\pi^2 a^* \sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} \frac{r^{*2} \mathbf{K}(k)}{[(1 + \rho^*)^2 + (z^*)^2]^{1/2}} df \quad (3.46)$$

La integral en λ no admite una expresión analítica, en consecuencia es necesario recurrir a un algoritmo numérico, eficiente en el manejo de funciones singulares, ya que cuando el cuerpo menor cruza la órbita del planeta, $m = 1$ y $K(m)$ diverge, mientras que la integral doble en las anomalías medias es siempre una función bien definida (ver Gronchi & Millani (1999)).

3.3.1. Implementación numérica

El programa `mapakozaiq` escrito en lenguaje “Fortran” utiliza como parámetros de entrada el valor de H y del semieje a de la partícula. Estos se ingresan a través de un archivo llamado `kozaiq.ent` en el cual se especifica el rango de valores del perihelio q , del argumento del perihelio ω para el cual se desea realizar el cálculo, así como el tamaño de la partición para la grilla.

El programa lee este archivo y procede al cálculo de la integral 3.4 para cada par de valores de (ω, q) . Para esto se utiliza una subrutina de *Numerical Recipes in Fortran* llamada `rf` que calcula la integral elíptica del primer tipo $\mathbf{K}(k)$ para luego hacer uso de las rutinas `qtrap` y `trapzd` para cada punto del plano (ω, q) .

3.4. Resumen

Puede ser útil a esta altura repasar los resultados del tratamiento del problema de n-cuerpos presentado en este capítulo.

A través de una formulación Hamiltoniana del problema de n-cuerpos restringido mediante las variables de Delaunay, expresando el Hamiltoniano real como una perturbación del Hamiltoniano de dos cuerpos y a través de la teoría de perturbaciones, llegamos a una aproximación del Hamiltoniano real que es *la aproximación más cercana posible* a un Hamiltoniano integrable. De esta manera el *Hamiltoniano promedio* queda expresado como

$$\bar{\mathcal{H}}(g, L, G, H) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1, N} m_j \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}_j(l, g, L, G, H, l_j) dl dl_j,$$

donde las perturbaciones \mathcal{P}_j están dadas en la ecuación 3.14.

Se concluye además que en esta aproximación se conservan las cantidades a , $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ y el Hamiltoniano $\bar{\mathcal{H}}$ a lo largo de las trayectorias solución del movimiento en el espacio de fases.

Por otra parte si asumimos que *las órbitas de los planetas son circulares* el Hamiltoniano queda independiente de Ω , con lo cual el espacio de fases queda restringido al plano $(g, G) = (\omega, \sqrt{a(1 - e^2)})$, que a su vez dado que a es constante analizaremos el plano (ω, q) , donde $q = a(1 - e)$ si bien no es la variable canónica conjugada de ω será de utilidad en discusiones posteriores referentes al comportamiento de objetos en la Región Transneptuniana.

Capítulo 4

Aplicación a la Región Transneptuniana

En el apartado anterior mostramos que la dinámica secular de una partícula de masa despreciable, como por ejemplo un cometa o asteroide en el Sistema Solar, puede ser estudiada a través de un desarrollo perturbativo en el Hamiltoniano. Este desarrollo nos condujo a la conclusión de que tanto el semieje a como $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ son constantes del movimiento mientras que $\overline{\mathcal{H}}$, la aproximación integrable a primer orden del Hamiltoniano original, es una tercera integral del movimiento. Dados a y H , $\overline{\mathcal{H}}$ puede evaluarse numéricamente a partir de las masas y posiciones de los planetas. Es posible obtener la relación entre $\sqrt{1 - e^2}$ y ω mediante el trazado de curvas de nivel del Hamiltoniano $\overline{\mathcal{H}}$ ya que éste es constante a lo largo de la trayectoria de la partícula; esto se conoce como *diagrama de Kozai* (Kozai 1962). Además, teniendo en cuenta el hecho de que el semieje a también es constante, este mapa puede ser expresado a su vez en el plano (ω, q) donde $q = a(1 - e)$, ya que esta variable es de interés particular en el estudio del SD.

4.1. Hamiltoniano secular, curvas de nivel

En una descripción cualitativa del Hamiltoniano se observa que al fijar a y variar el parámetro H las curvas de nivel muestran un comportamiento característico que se repite para los diferentes valores de a . Las figuras muestran este comportamiento para semiejes $a = 60, 80, 100, 200, 500$ UA y diferentes valores de H . Como ya han mostrado Thomas & Morbidelli (1996), existen centros de libración $\dot{\omega} = 0$, $\dot{X} = 0$ directamente relacionados con las posiciones de las líneas de intersección de nodos¹; Gronchi & Milani (1999) mostraron que esto es una regla general para cualquier semieje, con lo cual a medida que las líneas de intersección de los nodos se van desplazando

¹lugar geométrico en el espacio de fases donde las órbitas de la partícula y un planeta se interactúan resultando en una probabilidad no nula de encuentro entre los objetos

también lo hacen los centros de libración. En las cercanías de un centro de libración la partícula se encuentra “protegida” por la propia dinámica en contra de colisiones con los planetas; sin embargo existe un hecho de mayor relevancia en el estudio de la dinámica de partículas dispersadas por Neptuno, y es que dado un semieje a existe un cierto rango de valores de H para los cuales las variaciones en perihelio son extremas (ver figuras); este tipo de comportamiento se da para valores bajos de H lo cual corresponde a valores elevados de inclinación máxima a través de la relación $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$.

A partir de los mapas estudiados y teniendo en cuenta que la aproximación realizada debe ser válida al menos durante el tiempo en el cual la partícula evita encuentros con los planetas, se pueden obtener algunas conclusiones interesantes. Existen ciertas combinaciones de H y a (por ejemplo figura 4.1, $H \simeq 0,4$) que presentan variaciones del perihelio considerables. Los mapas muestran que una partícula cuyo perihelio se encuentre inicialmente cercano a un valor de 30 UA deberá necesariamente bajar el valor del mismo debido a la evolución secular. Esta evolución regular se rompe a partir del momento en el cual la partícula adquiere una órbita que intersecta a la de algún planeta, situación que puede darse (ver figura 4.1 para $H = 0,2$) en las líneas de intersección de los nodos para perihelios no muy bajos o cuando se adquieren valores de q por ejemplo del orden de 10 UA donde la aproximación ya no es válida debido a la cercanía con los planetas (ver figura 4.1 para $H = 0,4$).

A los efectos de verificar la veracidad de estas afirmaciones y su marco de aplicabilidad es necesario realizar integraciones numéricas a partir de condiciones iniciales compatibles con estos mapas; en la siguiente sección mostramos los resultados obtenidos. Las integraciones numéricas en este trabajo se realizaron utilizando el integrador EVORB, el cual es descrito en Fernandez et al. (2002,2004). Este código integra directamente las ecuaciones de movimiento, simulando la dinámica del Sistema Solar real, en el cual las órbitas de los planetas se obtienen como solución de dichas ecuaciones resultando en órbitas no circulares y no coplanares a diferencia de la aproximación utilizada en el modelo descrito anteriormente.

En la región transneptuniana los objetos están tan débilmente ligados al Sol que sus órbitas osculantes heliocéntricas muestran importantes variaciones de corto período debido a las perturbaciones gravitacionales de los planetas gigantes. Por esta razón es preferible en estos casos referir las coordenadas al baricentro del Sistema Solar, es decir tomar coordenadas baricéntricas en lugar de heliocéntricas.

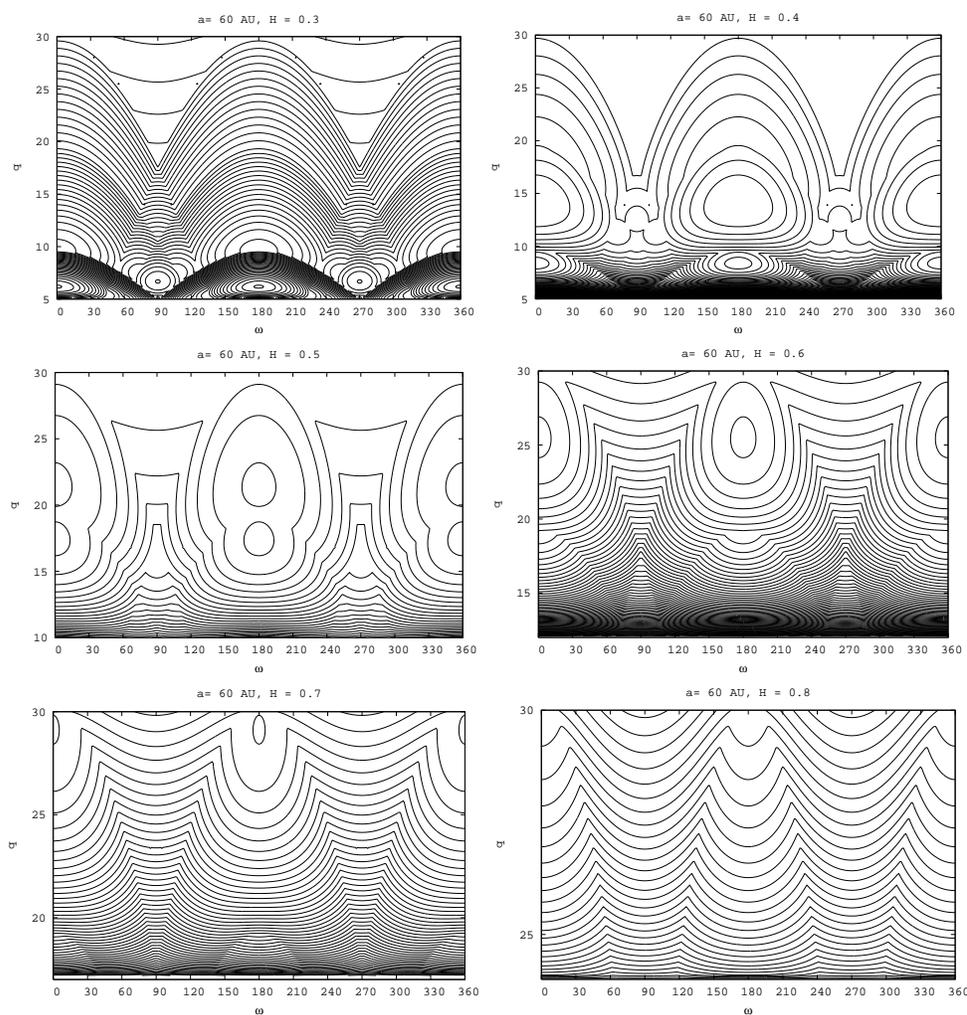


Figura 4.1: Mapas de Kozai correspondientes a un valor de semieje $a = 60$. De izquierda a derecha, arriba a abajo, $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ varía de 0,3 (arriba izquierda) a $H = 0,8$ (abajo derecha) correspondiendo esto a valores de inclinación máxima i_{max} en el mismo orden de $72,5^\circ$ hasta $37,8^\circ$

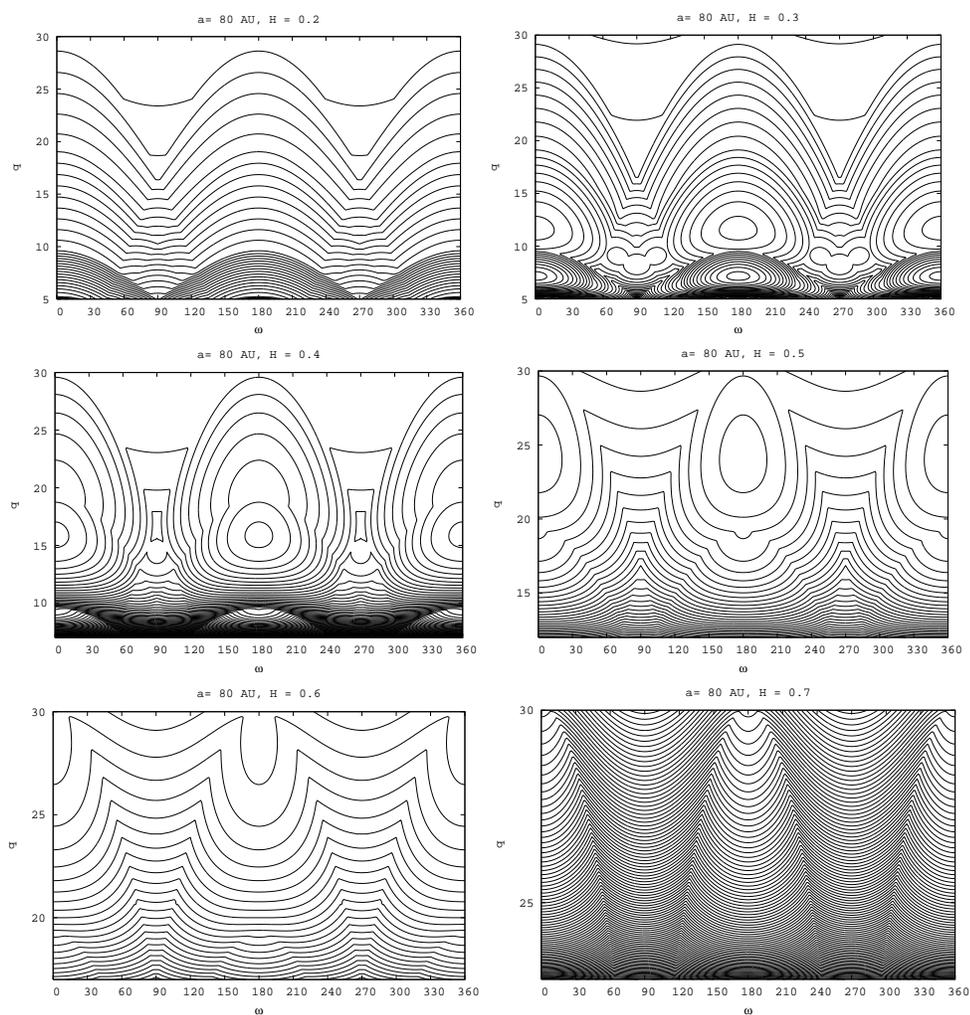


Figura 4.2: Mapas de Kozai correspondientes a un valor de semieje $a = 80$. De izquierda a derecha, arriba a abajo, $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ varía de 0,2 (arriba izquierda) a $H = 0,7$ (abajo derecha) correspondiendo esto a valores de inclinación máxima i_{max} en el mismo orden de $78,4^\circ$ hasta $45,6^\circ$

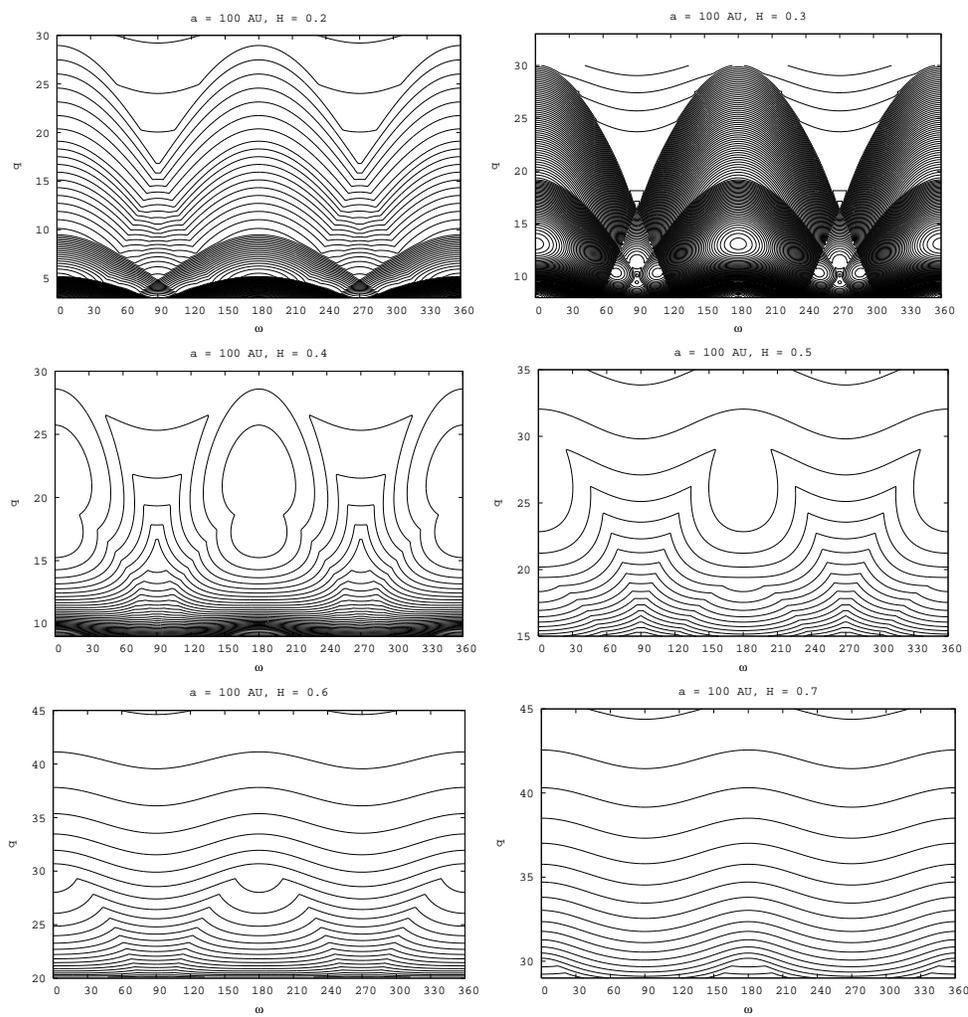


Figura 4.3: Mapas de Kozai correspondientes a un valor de semieje $a = 100$.
Idem anterior

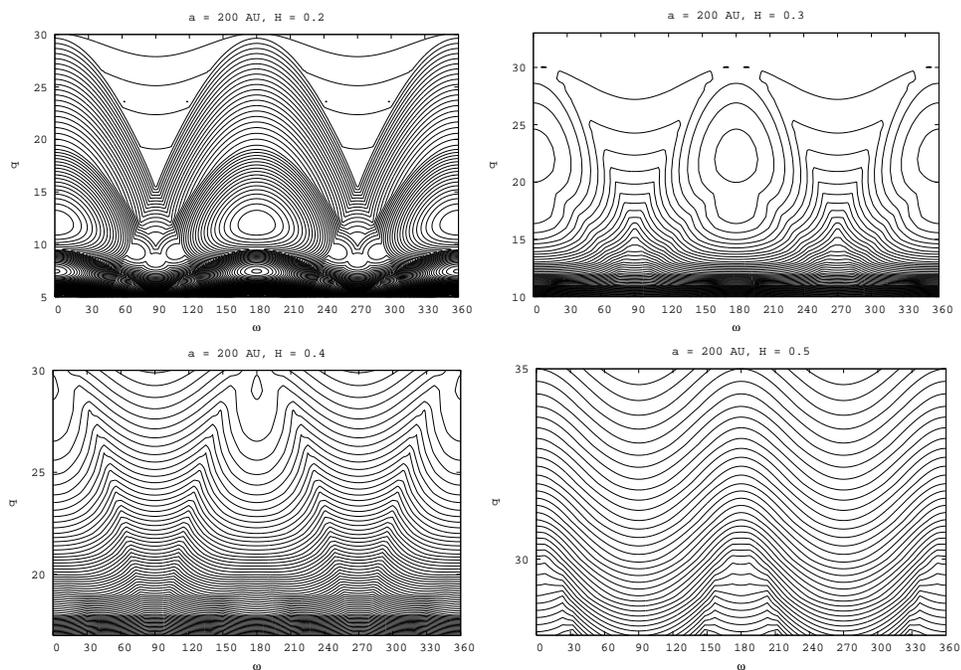


Figura 4.4: Mapas de Kozai correspondientes a un valor de semieje $a = 200$. De izquierda a derecha, arriba a abajo, $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ varía de 0,2 (arriba izquierda) a $H = 0,5$ (abajo derecha) correspondiendo esto a valores de inclinación máxima i_{max} en el mismo orden de $78,4^\circ$ hasta $60,0^\circ$

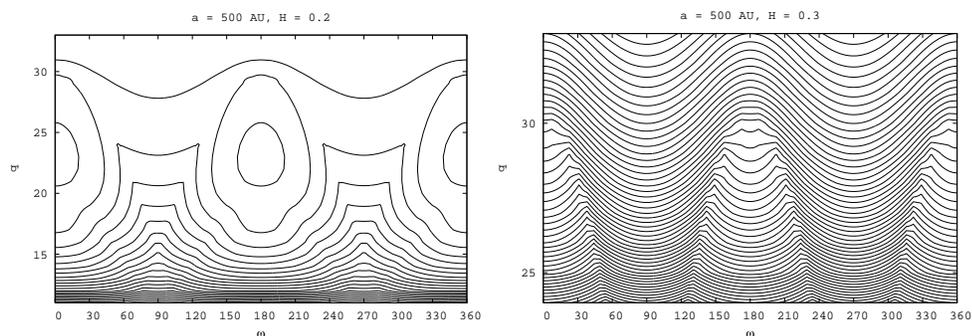


Figura 4.5: Mapas de Kozai correspondientes a un valor de semieje $a = 500$. Izquierda $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i = 0,2$, derecha $H = 0,3$ correspondido esto a sendos valores de inclinación máxima i_{max} $78,4^\circ$ y $72,5^\circ$

4.2. Mapas de Kozai (seculares), $q \leq 30$ UA

4.2.1. Inclinaciones iniciales altas

La figura 4.6 muestra la evolución de los elementos orbitales de una partícula ficticia cuyo perihelio se encuentra inicialmente en Neptuno $q \simeq 30$ UA, con una inclinación de $i \simeq 60^\circ$. El objeto evoluciona bajo lo que se conoce como el *mecanismo de Kozai*, es decir una evolución en la cual excentricidad e inclinación se encuentran acopladas a través de la constancia de H . Como muestra el mapa de Kozai de la figura 4.7 la aproximación de primer orden describe correctamente la dinámica hasta que el perihelio alcanza un valor de $q \simeq 15$ UA donde las perturbaciones debidas principalmente a Neptuno hacen que la aproximación ya no sea válida, con lo cual debido a los múltiples encuentros posteriormente con Urano y Neptuno ésta es dispersada hacia valores de semieje mayores a 1000 UA (esta etapa final no se muestra en la figura por razones de claridad). Esta evolución transitoria en la cual el objeto adquiere una órbita lo suficientemente excentrica como para ingresar a la zona dominada por los planetas exteriores del sistema solar a partir de una órbita originada a través de un encuentro con Neptuno, puede identificarse con una subclase no muy bien definida aún, perteneciente a los denominados *Centaurus* (Di Sisto et al. 2007). Si bien este modelo no es capaz de describir correctamente la dinámica a partir del momento en que la partícula ingresa al dominio de Urano y Neptuno, sí es posible afirmar que un objeto con las condiciones iniciales que correspondan a un mapa de Kozai cuya topología sea similar a la del ejemplo mostrado, deberá disminuir necesariamente su perihelio en un tiempo característico, que debería ser posible determinar debido a la regularidad del movimiento, (nótese que en las integraciones numéricas que se muestran en las figuras 4.6 y 4.8 fue de aproximadamente 5 Mys) para luego ser dispersada en otro tiempo característico, que está asociado a una dinámica dominada por encuentros y por lo tanto extremadamente irregular, y que tampoco ha sido determinado aún con precisión.

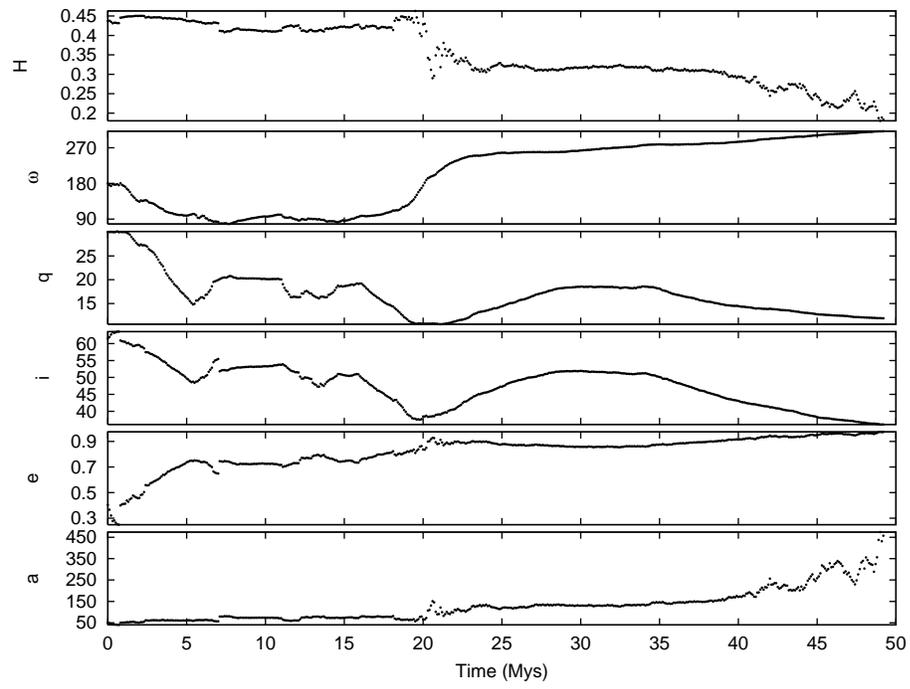


Figura 4.6:

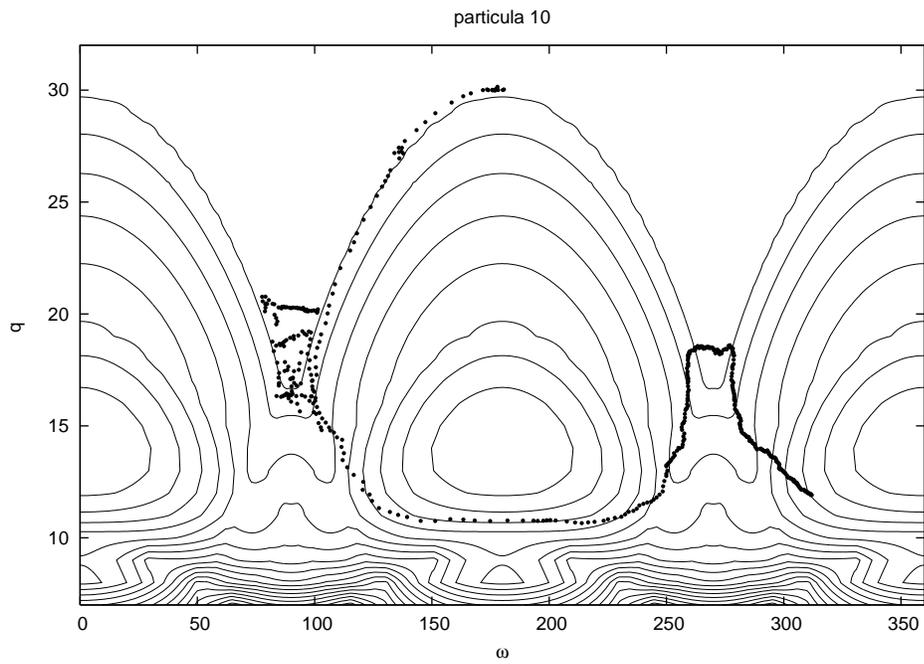


Figura 4.7:

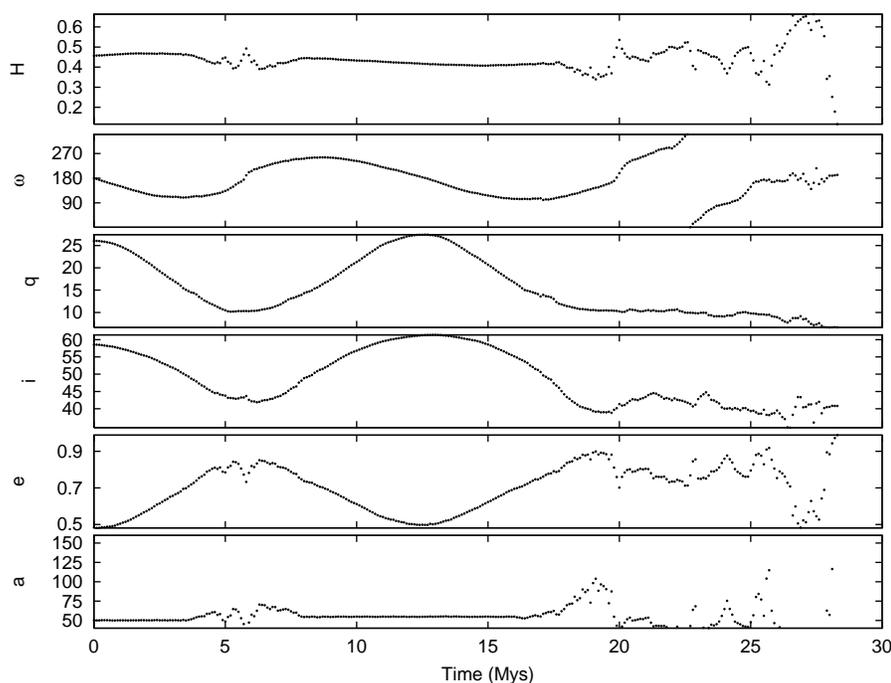


Figura 4.8:

4.2.2. Inclinationes iniciales bajas

El valor máximo posible para la inclinación de una partícula se puede obtener a partir de $H = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ imponiendo $e = 0$. Es común en la literatura que se realice una distinción entre objetos por encima y por debajo de un valor de inclinación que puede ser $i \simeq 45^\circ$ ya que la población de objetos por encima de este valor debería ser menor en base a los modelos de formación del Sistema Solar; no obstante son cada vez más los objetos observados con alta inclinación lo cual plantea una interrogante en ese sentido. En las figuras los mapas compatibles con inclinaciones por debajo de unos 45° son los correspondientes a semiejes de 60, 80 y 100 UA con valores de H de alrededor de 0.7. Para estos valores de H los mapas muestran variaciones de perihelio bajas que se dan en general para q inicial menor a 30 UA como se puede ver en la figura 4.11. En estos casos la partícula encuentra líneas de intersección de los nodos durante toda su evolución, resultando en encuentros frecuentes siempre que el perihelio de ésta se encuentre por debajo de 30 UA. Sin embargo para valores iniciales de q mayores a 30 UA los mapas predicen una evolución estable por tiempo indeterminado (ver figuras 4.10 y 4.11). Podríamos concluir de este análisis que una partícula con condiciones iniciales $i < 40$ y $q < 30$ UA evolucionará de manera irregular debido a los múltiples encuentros con los planetas exteriores del sistema solar mientras que para valores de $q > 30$ UA no son esperables cambios en el perihelio.

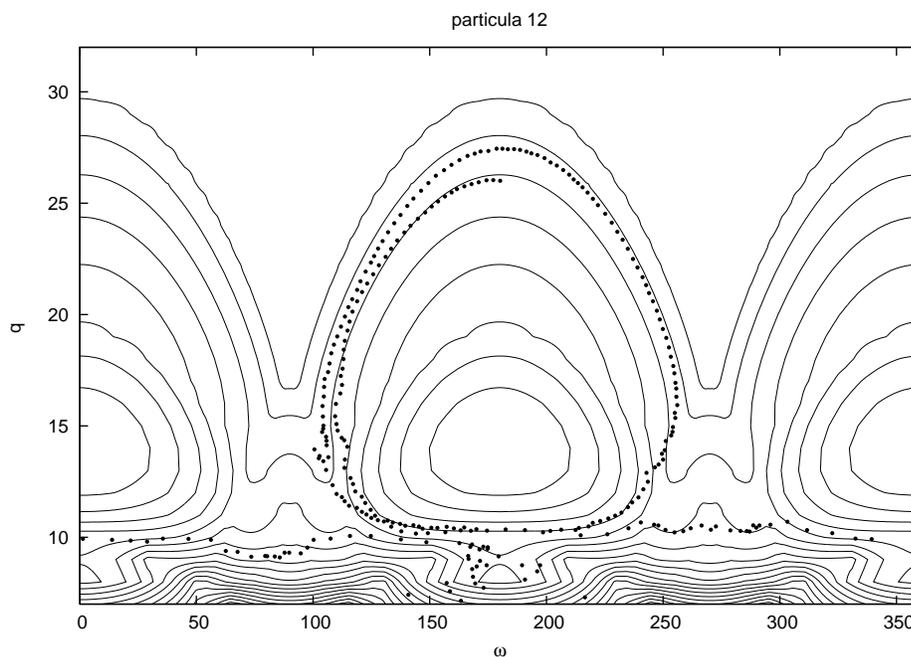


Figura 4.9:

Sin embargo el comportamiento cambia radicalmente si el objeto es capturado en una resonancia como muestra el ejemplo de la figura 4.12 que se encuentra dentro de la resonancia 3:11 con Neptuno.

Decimos que un objeto está en resonancia de orden q $|p + q| : |p|$, como por ejemplo el objeto de la figura 4.12 en la 3:11 con Neptuno, cuando se cumple que los movimientos medios de la partícula y el planeta (en este caso Neptuno) cumplen la siguiente relación

$$\frac{n}{n_N} \simeq \frac{p + q}{p}$$

en cuyo caso el *ángulo crítico* σ_0 cumple

$$\sigma_0 = -(p + q)\lambda_N + p\lambda \simeq cte$$

4.2.3. Mapas resonantes

En el capítulo anterior mostrábamos que en caso de existir una conmensurabilidad entre los períodos orbitales de la partícula y algún planeta, la aproximación que hemos manejado no es válida debido a la divergencia del Hamiltoniano generador de la transformación canónica que permite la aproximación a primer orden en las masas.

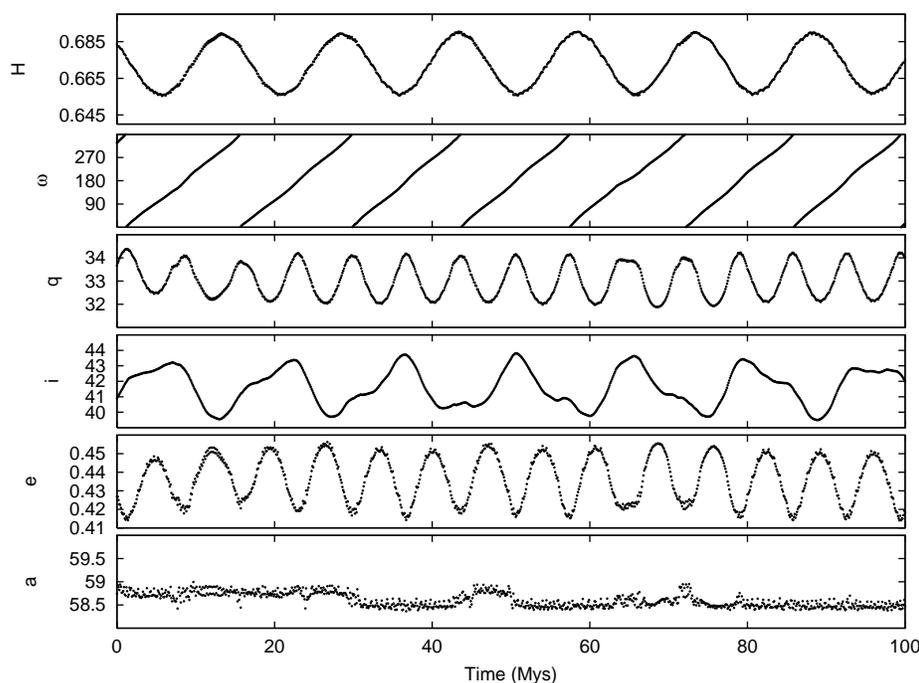


Figura 4.10:

Sin embargo así como fue posible encontrar una expresión “lo más cercana posible” a la aproximación integrable cuando aparecían armónicos que hacían anularse el denominador en el Hamiltoniano generador, es posible realizar una aproximación en caso de encontrarnos en una resonancia al imponer una conmensurabilidad entre las anomalías medias de la partícula y el planeta en el cálculo de la integral 3.4 a través de una libración del ángulo crítico σ_0 . Sin embargo son necesarias algunas herramientas adecuadas para establecer el rango de libración de este ángulo y de esta manera asegurarse que la condición impuesta en el cálculo del Hamiltoniano medio resonante es válida a lo largo de la trayectoria de la partícula.

No nos detendremos en la justificación ni en los detalles de este procedimiento ya que no es el objetivo de este trabajo; no obstante hemos implementado un código que calcula estos mapas resonantes, quedando una línea de trabajo abierta en este sentido ya que la dinámica en estos casos se vuelve mucho más rica al tiempo que aumenta la dificultad en su estudio. Mostramos a modo de ejemplo el caso de una partícula (figuras 4.12 y 4.13) con su mapa correspondiente que muestra como son posibles variaciones del perihelio mucho mayores cuando se alcanza la condición resonante. En este caso el cambio en perihelio es considerable llegando a valores de $q = 45$ UA a partir de un valor promedio inferior a 30 UA. Esto es lo que se conoce comúnmente como mecanismo de Kozai dentro de una resonancia de movimientos medios (MMR).

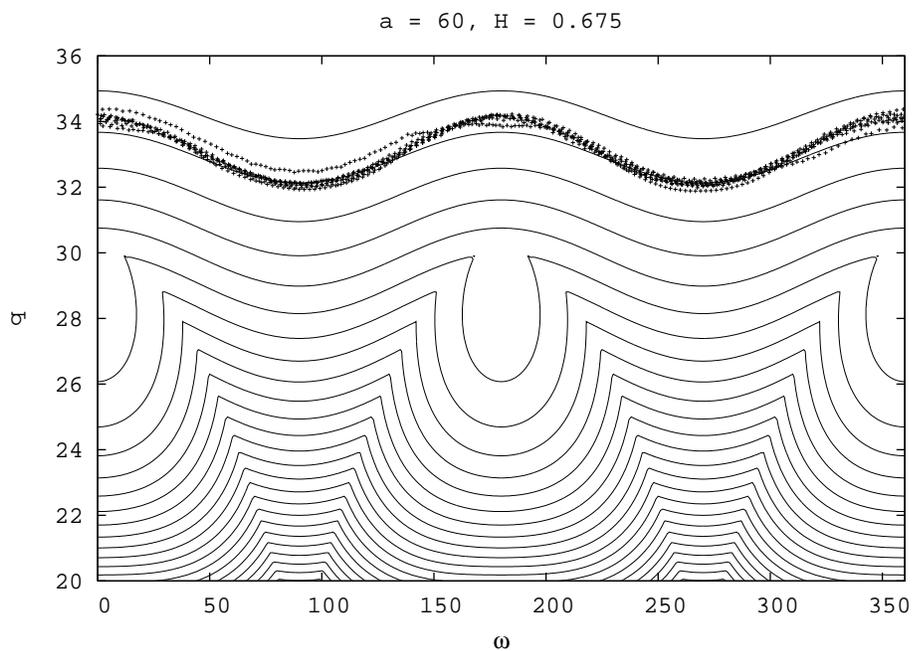


Figura 4.11:

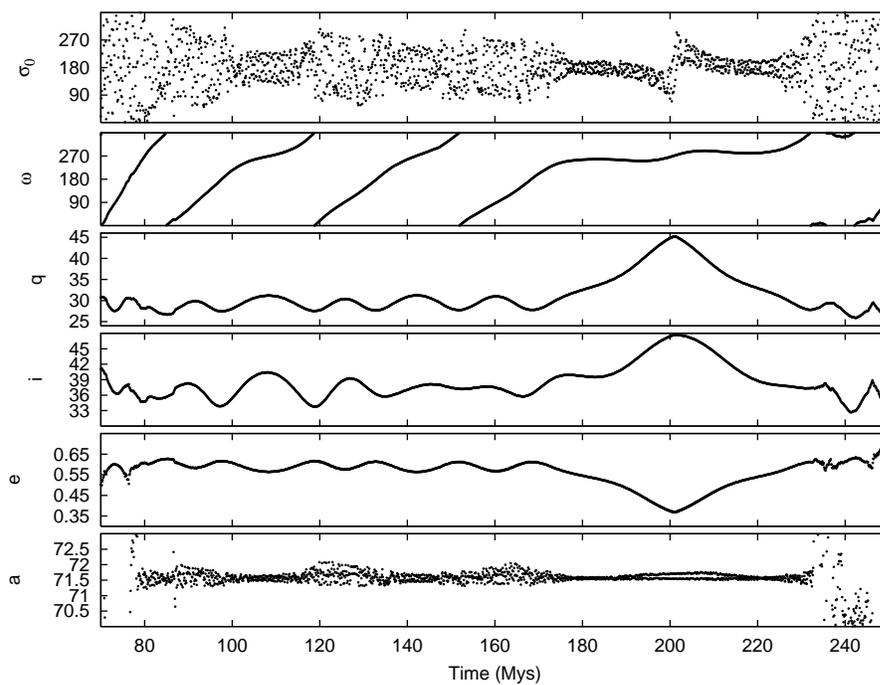


Figura 4.12:

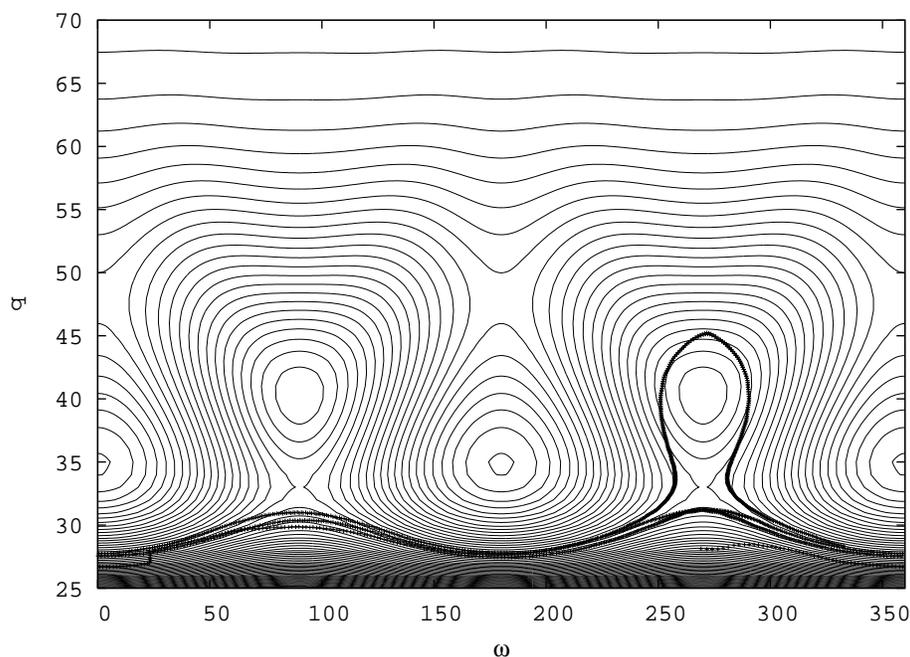


Figura 4.13:

4.3. Mapas de Kozai (seculares) para $q > 30$ UA

4.3.1. Inclinación Crítica

Imponiendo $|\dot{\omega}| = 0$ en las ecuaciones planetarias de Lagrange, (Gallardo 2006) mostró que existe una *inclinación crítica* en la cual se presenta el mecanismo de Kozai y que $i_{crit} \approx 63^\circ$ para un objeto típico del SD como lo es una partícula situada en el semieje correspondiente a la resonancia 1:11 N pero describiendo un movimiento *no resonante*. Las figuras 4.14, 4.15, 4.16 y 4.17 muestran que esta situación se da en general para diferentes valores del semieje debido a la existencia de centros de libración que corresponden (en estos mapas) a $\dot{\omega} = 0, \dot{q} = 0^2$. La figura 4.16 muestra el centro de libración encontrado por Gallardo mediante otro método. En la figura 4.17 se ha realizado la verificación mediante integración numérica de las ecuaciones para el Sistema Solar real.

Se realizó un relevamiento de los centros de libración para diferentes semiejes hallándose mediante el mapa de Kozai el valor de X_{crit} para cada valor de H . Los resultados se muestran en la figura 4.18. Se ajustó la recta $X_c = \alpha + \beta H$; los valores obtenidos para α y β se muestran en la tabla 4.19. Mediante este ajuste, dado un valor de H es posible obtener el valor de X_{crit} ,

²Es claro que $\dot{q} = 0$ es equivalente a $\dot{X} = 0$ debido a la constancia de a .

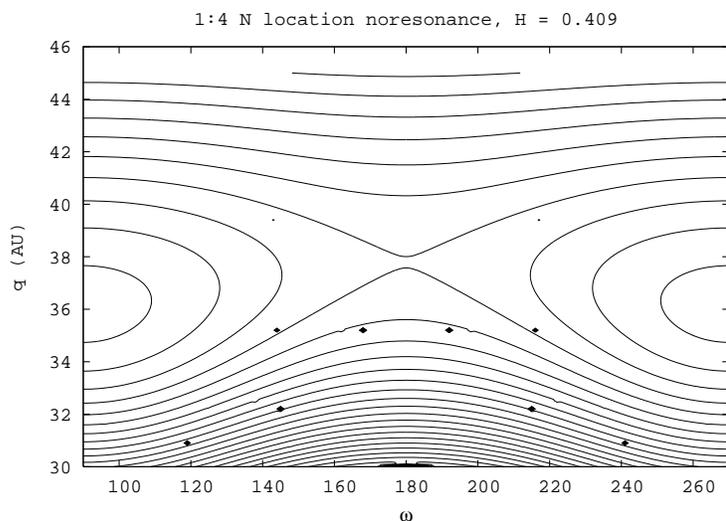


Figura 4.14: Mapa Secular (*no resonante*) correspondiente a un semieje $a = 75,898$ UA (res 1:4 N).

y a través de la relación $H = X \cos i$ es posible encontrar el valor de i_{crit} .

Finalmente las figuras 4.20 y 4.21 muestran un ejemplo de la existencia de centros de libración en $\omega = 90$ (además de los existentes en $q < 15$ UA) con un valor de perihelio por debajo de 30 UA; estos centros de libración se desplazan hacia valores mayores de q a medida que se aumenta H siguiendo las rectas $X_c = \alpha + \beta H$ calculadas anteriormente. Vale destacar la compleja estructura dinámica que se puede apreciar mediante estas curvas de nivel.

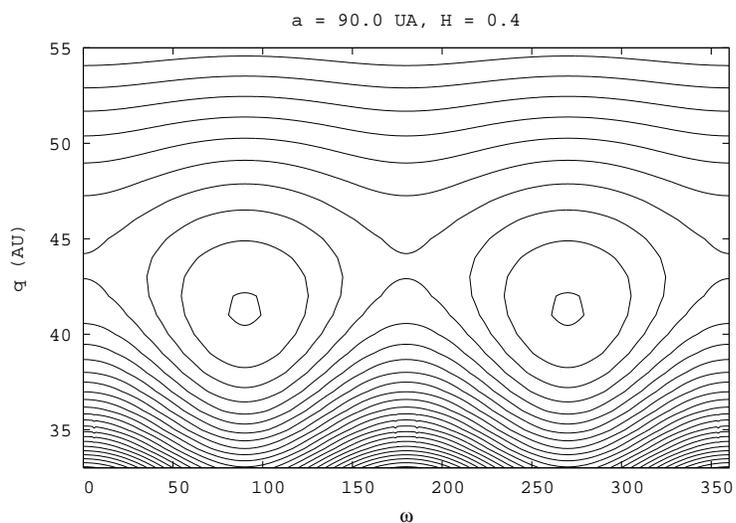


Figura 4.15: Mapa de Kozai mostrando un ejemplo de centro de libración para $a = 90$, $H = 0,4$. El valor calculado de $i_c \approx 62^\circ$

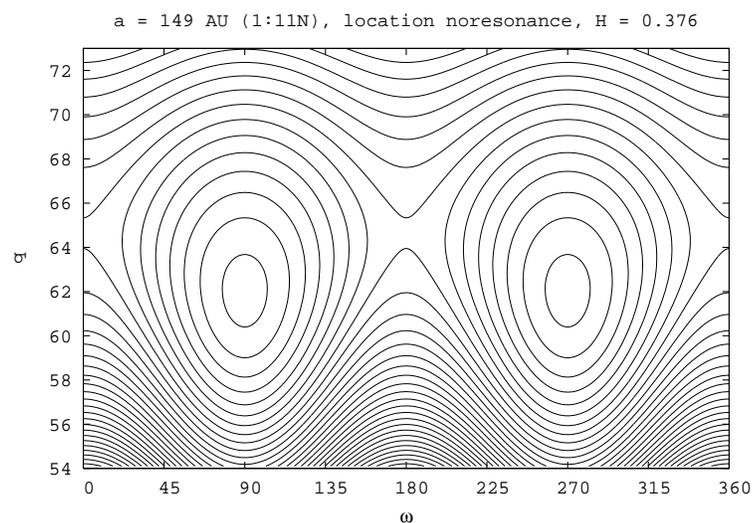


Figura 4.16: Mapa Secular (*no resonante*) correspondiente a un semieje $a = 148,98$ UA (res 1:11 N) en régimen no resonante, el valor encontrado para la inclinación crítica en este ejemplo es $i_c = 62,4^\circ$.

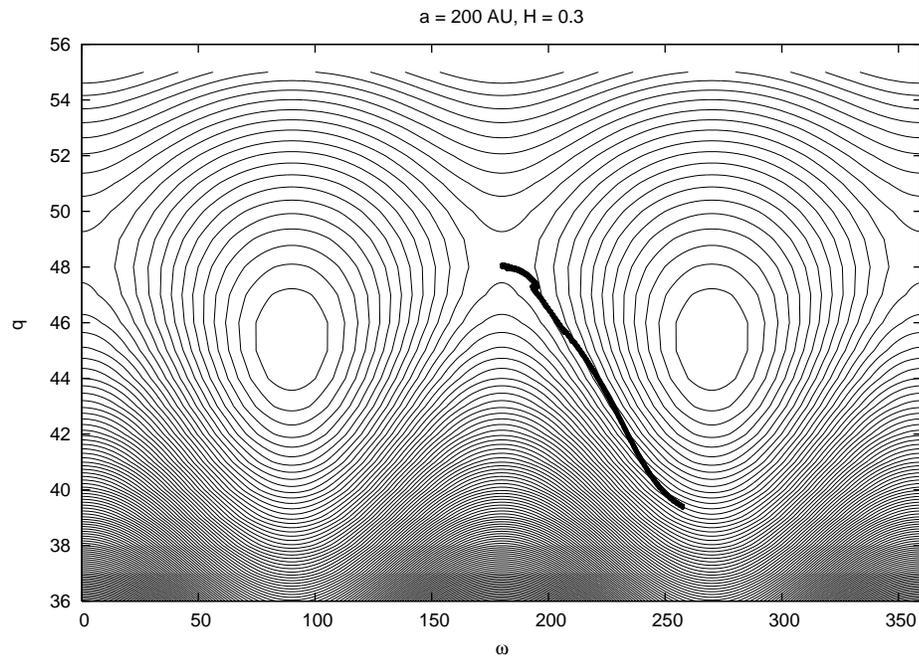


Figura 4.17: Mapa Secular correspondiente a un semieje $a = 200$, $H = 0,25$ izquierda y $H = 0,30$ derecha. Se muestra la trayectoria de una partícula de prueba. El valor encontrado para i_c a partir de este mapa es $61,9^\circ$

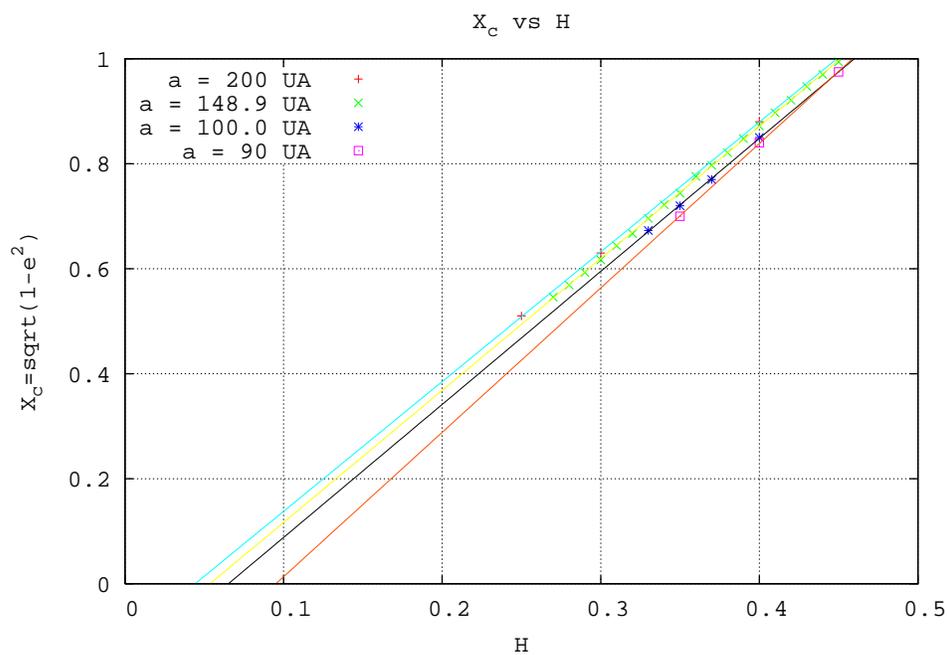


Figura 4.18: Curva de variação de X_{crit} com H , mostrando a relação linear entre ambos.

a (AU)	α	β
200.0	-0.11	2.47
148.9	-0.14	2.52
100.0	-0.17	2.53
90.0	-0.26	2.75

Figura 4.19: Ajuste linear $X = \alpha + \beta H$ para diferentes valores de semieje.

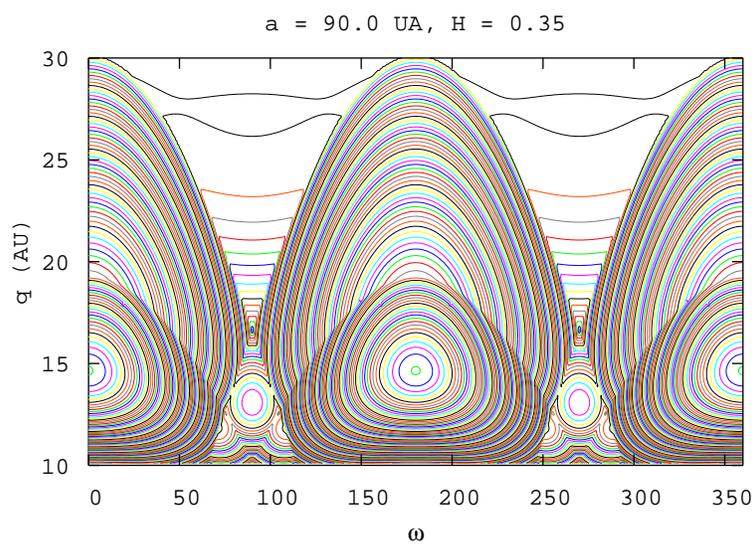


Figura 4.20: Mapa Secular mostrando la existencia de un centro de libración para $q < 30 \text{ UA}$

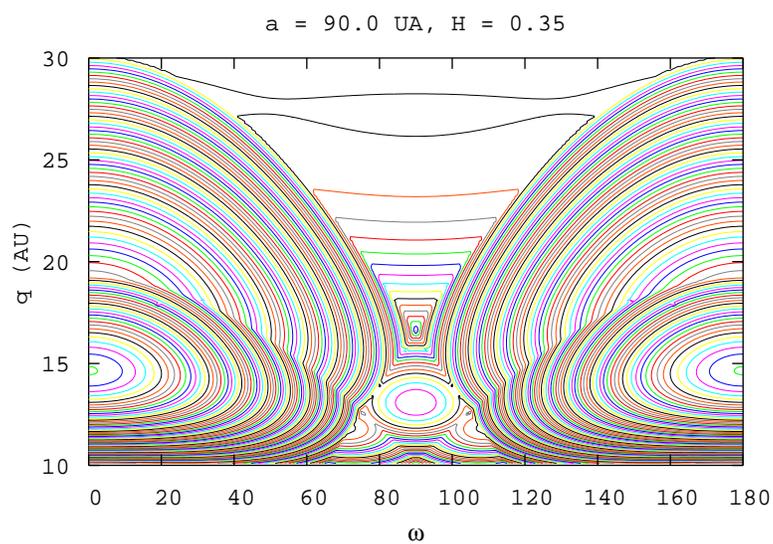


Figura 4.21: Ampliación de la figura anterior mostrando detalles de la compleja estructura dinámica en esta región

4.4. Conclusiones

En el transcurso de este trabajo se ha adquirido una profunda comprensión de la dinámica experimentada por una partícula sometida a las fuerzas de interacción con los planetas del Sistema Solar completo. Para ello fue necesaria la aplicación de robustos métodos de la teoría de Hamiltonianos, siendo el problema estudiado un bello e ilustrativo ejemplo de lo que se puede lograr mediante la teoría de perturbaciones, siendo este un ejemplo de suma importancia también desde el punto de vista histórico de la Física ya que muchas de las ideas expuestas en estos procedimientos contribuyeron de manera significativa al desarrollo de las primeras etapas de la mecánica cuántica.

En lo que concierne al código desarrollado, hemos trabajado a partir de un método simple como lo son los mapas de Kozai en base a los resultados de las teorías antes mencionadas y desarrollado una herramienta de trabajo tanto para el caso secular expuesto en las páginas precedentes como para el caso resonante, que involucra todo un horizonte de interrogantes en la dinámica del Cinturón Transneptuniano.

Mediante estas herramientas hemos explorado las posibles evoluciones para toda una gama de condiciones iniciales que permiten visualizar como un todo la dinámica experimentada por una partícula en esta zona del Sistema Solar, para sí luego realizar integraciones numéricas que confirmen las aseveraciones realizadas en base a estos métodos globales.

Encontramos varios casos de interés como lo son las grandes variaciones de perihelio que muestran los mapas para condiciones iniciales de alta inclinación, que predicen que una partícula en una órbita cuyo perihelio se encuentra inicialmente en un valor igual al semieje de Neptuno necesariamente bajará el valor del mismo para entrar en la zona dominada por los planetas gigantes pasando a un estado transitorio que se puede perfectamente enmarcar dentro de una subclase, aún no establecida en la literatura, de objetos que se han dado a llamar *Centauros*. Estos mapas podrían ayudar a clasificar de alguna manera estos objetos dado que es posible conocer la evolución completa en el espacio de fases. Esto puede ayudar por ejemplo en el cálculo de tiempos de vida media de estos objetos en función de sus condiciones iniciales, ya que dado un cierto valor de de los parámetros la evolución está bien determinada por estos mapas, hasta que se produce el encuentro con los planetas interiores.

En otro rango de parámetros correspondientes a inclinaciones del orden de los 63° encontramos centros de libración con $\dot{\omega} = 0$ verificando los resultados obtenidos por Gallardo (2006) mediante un método diferente. Hemos determinado que estos centros de libración ocurren para cualquier valor de semieje a partir de $a \approx 90$ UA. Dado un valor de semieje el rango de valores de H para los cuales esto se da está acotado entre aproximadamente 0,05 y 0,5. Si bien la inclinación crítica correspondiente al centro de libración no es

constante, las variaciones son mínimas alrededor de aproximadamente 62° .

Finalmente presentamos un ejemplo de mapa resonante y una simulación numérica que muestra cómo de verificarse la condición de resonancia es posible que el objeto realice grandes cambios de perihelio debido al cambio drástico en la forma de las curvas de nivel entre el caso secular y el resonante.

Como decíamos anteriormente en relación a lo mapas resonantes, esta es una línea abierta para un trabajo posterior ya que para entender la estructura dinámica en el Disco Dispersado es esencial comprender en profundidad el comportamiento resonante. Como mostrábamos al principio de este trabajo, esta zona se encuentra repleta de objetos capturados en resonancias, al tiempo que la interacción entre la dinámica secular y la resonante en modelos de migración planetaria puede arrojar algo de claridad al estudio de la evolución del Sistema Solar desde sus orígenes.

Apéndice A

Transformaciones Canónicas y Series de Lie

A.1. Transformaciones Canónicas

Una transformación de coordenadas y momentos en el espacio de fases que preserva la forma canónica de las ecuaciones de movimiento se conoce como *transformación canónica*.

Es decir que si consideramos variables canónicas q_i, p_i cuyas ecuaciones de movimiento están dadas por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (\text{A.1})$$

Si consideramos un cambio de las variables q_i, p_i en un nuevo conjunto q_i^*, p_i^* definido por las $2N$ ecuaciones

$$q_j^* = q_j^*(q_i, p_i) \quad p_j^* = p_j^*(q_i, p_i) \quad (\text{A.2})$$

la transformación se dice canónica si preserva la forma canónica, es decir si bajo la transformación la ecuación A.1 se convierte en

$$\dot{q}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i^*} \quad \dot{p}_i^* = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i^*} \quad (\text{A.3})$$

donde H^* es una nueva función de las variables q_i^*, p_i^* .

A.1.1. Corchete de Poisson

El criterio más útil para verificar que una transformación es canónica es el del *corchete de Poisson*.

El *corchete de Poisson* entre las funciones $f(p, q)$ y $g(p, q)$, donde $q = (q_1, \dots, q_n)$ y $p = (p_1, \dots, p_n)$ son variables canónicas conjugadas, es definido

por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i}. \quad (\text{A.4})$$

Se puede probar que considerando las variables q_i^*, p_i^* como funciones de las variables q_i, p_i , la transformación definida por las ecuaciones A.2 es canónica si

$$\{p_i^*, p_j^*\} = 0, \quad \{q_i^*, q_j^*\} = 0, \quad \{q_i^*, p_j^*\} = \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y cero en caso contrario.

Otro criterio, que es la base del enfoque de Lie a la teoría de perturbaciones, es que la transformación A.2 es canónica si existe un Hamiltoniano $\chi(p^*, q^*)$ (llamado *Hamiltoniano generador*) y un parámetro ϵ tales que

$$p = p^* + \int_0^\epsilon \dot{p}^* dt \equiv p^*(\epsilon), \quad q = q^* + \int_0^\epsilon \dot{q}^* dt \equiv q^*(\epsilon), \quad (\text{A.6})$$

donde p_i^*, q_i^* están dadas por las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial \chi}{\partial q_i^*}, \quad \dot{q}^* = \frac{\partial \chi}{\partial p_i^*}, \quad (\text{A.7})$$

es decir que una transformación en el espacio de fases es canónica si puede ser interpretada como el resultado de un flujo Hamiltoniano en un cierto tiempo ϵ .

A.1.2. Series de Lie

La evolución temporal de una función $f(p, q)$ definida en el espacio de fases, con p, q evolucionando de acuerdo a las ecuaciones A.1, puede ser escrita mediante simple diferenciación y utilizando las ecuaciones A.1

$$\frac{df}{dt} = \nabla_q f \cdot \dot{q} + \nabla_p f \cdot \dot{p} = \{f, H\}. \quad (\text{A.8})$$

Aquí hemos abreviado $q = (q_1, \dots, q_n)$ y $p = (p_1, \dots, p_n)$ mientras que H es el Hamiltoniano del sistema.

El valor de $f(t) \equiv f(p(t), q(t))$ es llamado evolución de f a lo largo del flujo de H . Expresando $f(t)$ mediante un desarrollo de Taylor como

$$f(t) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \frac{d^i f}{dt^i}(0), \quad (\text{A.9})$$

donde $f(0) = f(p(0), q(0))$ y $\frac{d^i f}{dt^i}(0) = (p(0), q(0))$, y utilizando que $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$ y $\frac{d^2 f}{dt^2} = \{\frac{df}{dt}, H\} = \{\{f, H\}, H\}$, etc. Designamos

$$\mathcal{L}_H^1 f = \{f, H\}, \quad \mathcal{L}_H^i f = \mathcal{L}_H^1 f \mathcal{L}_H^{i-1} f, \quad (\text{A.10})$$

uno finalmente llega a que

$$f(t) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \mathcal{L}_H^i f(0), \quad (\text{A.11})$$

expansión usualmente llamada *Serie de Lie* de f bajo el flujo de H y se denota $\mathcal{S}_H^t f$, con lo cual la transformación canónica expuesta en el apartado anterior no es otra cosa que

$$p = \mathcal{S}_\chi^\epsilon p^*, \quad q = \mathcal{S}_\chi^\epsilon q^*. \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

El Problema de 2-Cuerpos

De acuerdo a la Teoría de la Gravitación de Newton, las ecuaciones de movimiento de un sistema de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 y simetría esférica, cuyas posiciones se designan a través de los vectores $\vec{r}_i \in R^3$ respecto a un sistema de referencia inercial son las siguientes:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \mathcal{G} m_2 m_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \mathbf{F}_1 \quad (\text{B.1})$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \mathcal{G} m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = \mathbf{F}_2 \quad (\text{B.2})$$

donde \mathcal{G} es la constante de gravitación y $|\vec{x}|$ denota la norma Euclídea del vector $\vec{x} \in R^3$.

Las fuerzas de interacción entre estas partículas verifican el *principio de acción y reacción*, es decir que $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ y además estas actúan a lo largo de la línea que une ambas masas. Al sumar B.1 y B.2 los términos de la derecha se anulan mutuamente, razón por la cual es natural definir

$$\vec{\xi} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{B.3})$$

como el *baricéntrico* del sistema, ya que

$$\frac{d^2 \vec{\xi}}{dt^2} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Si $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ es el vector posición relativa, se tiene

$$\vec{r}_1 = \vec{\xi} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{\xi} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}.$$

Mediante estas expresiones es posible pasar de las variables (\vec{r}_1, \vec{r}_2) a las variables $(\vec{r}, \vec{\xi})$, con la ventaja de que la segunda de estas últimas cumple una ecuación de movimiento trivial (B.4).

Resta encontrar una ecuación de movimiento para \vec{r} . Es posible formular este problema en términos más generales recordando que al ser estas fuerzas conservativas admiten la siguiente formulación.

Sea

$$U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\mathcal{G}m_2m_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = -\frac{\mathcal{G}m_2m_1}{r}, \quad (\text{B.5})$$

donde hemos definido el vector posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y designamos r a la norma de dicho vector, es decir $r = |\vec{r}|$. Las ecuaciones B.1 y B.2 se pueden expresar como

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\nabla_1 U, \quad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\nabla_2 U. \quad (\text{B.6})$$

Donde la notación ∇_i se refiere a la derivación respecto de las coordenadas de \vec{r}_i .

Proposición B.1 *El vector posición relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ en el problema de dos cuerpos cambia de acuerdo a la misma ley que el vector posición de un punto de masa $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ moviéndose en un campo de fuerza central con potencial $U(r)$.*

Es inmediato verificar este resultado considerando $\vec{r}_1(\xi, r)$, haciendo uso de la condición B.4 y notando que

$$\nabla_1 U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \nabla U(r).$$

Por lo tanto el problema se reduce a investigar la ecuación

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla U(r), \quad (\text{B.7})$$

Una partícula sometida a un campo de fuerza central conserva el vector momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, con $\vec{p} = m\vec{v}$. Esto tiene como corolario inmediato que el movimiento en este caso transcurre en un plano perpendicular a este vector, en efecto si $\vec{r}(t)$ es solución de B.7, entonces $\vec{r}(t) \cdot \vec{L} = 0$. Sean (x, y) las coordenadas cartesianas en el plano de la órbita, de modo que $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ definen coordenadas polares, se cumple que $r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const}$. Si $c = 0$, entonces $\varphi = \text{const}$ (el punto se mueve a lo largo de una línea recta). Debemos asumir entonces $c \neq 0$, en ese caso φ es una función monótona de t , y por lo tanto existe su función inversa $t = t(\varphi)$. A medida que el punto m se mueve, su vector posición barre un sector de área curvilíneo

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^t r^2 \dot{\varphi} dt = \frac{ct}{2}. \quad (\text{B.8})$$

Por lo tanto $\dot{S} = c/2 = \text{const}$. Esta relación se conoce como la *segunda ley de Kepler* o *integral de área*; c lleva el nombre de constante de área.

Proposición B.2 (Newton) . Para un valor fijo de la integral de área c

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U_c}{\partial r}, \quad \text{con} \quad U_c = U + \frac{mc^2}{2r^2} \quad (r > 0). \quad (\text{B.9})$$

Esta ecuación describe el movimiento de un punto de masa m en la semirrecta $R^+ = \{r > 0\}$ bajo la acción de una fuerza conservativa con potencial U_c . Esta ecuación es integrable por cuadraturas utilizando la integral de energía

$$\frac{mr\dot{r}^2}{2} + U_c = h.$$

La función U_c se conoce como el *potencial efectivo*.

Es interesante notar que las integrales de área y de energía permiten calcular la ecuación de la órbita, es decir $\varphi(r)$ sin necesidad de resolver B.9. De hecho como $\dot{r} = \sqrt{2(h - U_c)/m}$ y $r^2\dot{\varphi} = c$, se tiene que

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c} \sqrt{\frac{2(h - U_c)}{m}}.$$

Integrando esta ecuación se obtiene la trayectoria $\varphi(r)$.

Proposición B.3 (Clairaut) . Sea $\rho = 1/r$, escribiendo la ecuación de la órbita como $\rho = \rho(\varphi)$, luego

$$m \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\rho} U_c \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (\text{B.10})$$

Hasta aquí el tratamiento presentado a partir de B.1 es igualmente válido para cualquier interacción que dependa del módulo de la distancia relativa $|r|$. En este caso el potencial U corresponde a la atracción gravitatoria B.5 o en la nueva variable definiendo $\gamma = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$, $U(r) = -\frac{m\gamma}{r}$. La ecuación de *Clairaut* se puede escribir entonces como

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = -\rho + \frac{\gamma}{c^2}.$$

Esta ecuación tiene por solución

$$\rho = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\gamma}{c^2} = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad (\text{B.11})$$

donde e y φ_0 son constantes, y $p = c^2/\gamma > 0$. Con lo cual

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (\text{B.12})$$

por lo tanto las órbitas en el problema de Kepler son cónicas con un foco en centro de atracción (*primera ley de Kepler*).

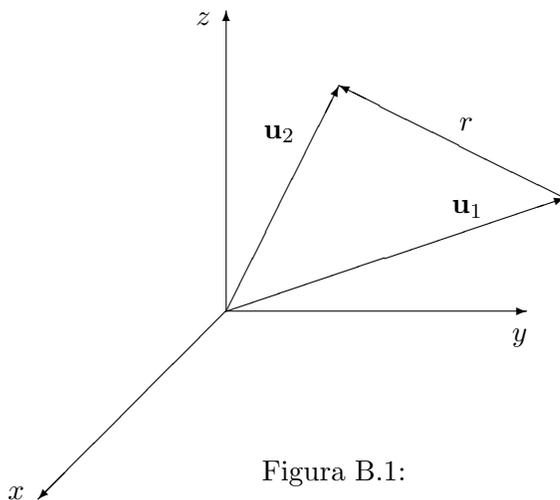


Figura B.1:

Observando la figura ?? es claro que dado $c \neq 0$, existe una única posición de equilibrio relativo $r_0 = c^2/\gamma$, que corresponde al mín $U_c = -\gamma^2/2c^2$. Utilizando la conservación de la energía se puede ver que $e = \sqrt{1 + 2c^2h/\gamma^2}$. Como $h \geq h_0 = -\gamma^2/2c^2$, la excentricidad asume valores reales únicamente.

Si $h = h_0$, entonces $e = 0$ y la órbita es circular. Si $h \geq h_0$, se tiene que $0 < e < 1$ siendo la órbita una elipse. El caso en que $h = 0$ implica que $e = 1$ y la órbita es una parábola. por último, si $h > 0$, entonces $e > 1$ y el punto se mueve a lo largo de una de las ramas de una hipérbola.

La conservación del momento angular, en el caso elíptico, establece una relación entre el período de revolución de la órbita T y el semieje mayor a de la misma, conocida como la *tercera ley de Kepler*: $a^3/T^2 = \gamma/4\pi^2$. Como

$$a = \frac{p^2}{1 - e^2} = \frac{\gamma}{2|h|},$$

T depende únicamente de la constante c .

Apéndice C

Código numérico en Fortran

```
C      PROGRAMA MAPAKOZAIQ.F

C      LA PARTE INDIRECTA ES NULA

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,J-Z)
      CHARACTER*50 APESOS
      DIMENSION SEM(20),MASA(20)
      EXTERNAL func
      COMMON /elementos/ A1,M1
      COMMON /partícula/ A2,P2,J2,E2
      TWOPI = 8.0D0*DATAN(1.0D0)
      CERO  = 0.0D0
      UNO   = 1.0D0
      PI=TWOPI/2.D0
      G2R=PI/180.D0
C      ERROR=1.D-6

      INPLA=8

C MEAN SEMIMAJOR AXIS
      SEM(1)= 0.387099D0
      SEM(2)= 0.72333D0
      SEM(3)= 1.00000D0
      SEM(4)= 1.52369D0
      SEM(5)= 5.2028D0
      SEM(6)= 9.555D0
      SEM(7)= 19.225D0
      SEM(8)= 30.12D0
```

```
MASA(1)=1.66013679D-07
MASA(2)=2.44783833D-06
MASA(3)=3.04043264D-06
MASA(4)=3.22715144D-07
MASA(5)=9.54791938D-04
MASA(6)=2.85885980D-04
MASA(7)=4.36624404D-05
MASA(8)=5.15138902D-05

OPEN(1,FILE="kozaiq.ent",STATUS="OLD")
C DATOS PLANETAS (1) Y PARTICULA (2)
C PLANETA: SEMIEJE EN UAS Y MASA EN MASAS SOLARES
C READ(1,1004)APESOS
C READ(1,*) INPLA
C READ(1,1004)APESOS
C DO I=1,INPLA
C READ(1,*) SEM(I),MASA(I)
C ENDDO
READ(1,1004)APESOS
READ(1,*) A2
READ(1,1004)APESOS
READ(1,*) ACHE
READ(1,1004)APESOS
READ(1,*) JIN1,DJIN,JIN2,ARG1,DARG,ARG2

CLOSE(1)

temporal=JIN1
JIN1=1.0d0-(JIN2/A2)
! write(*,*) JIN1
JIN2=1.0d0-(temporal/A2)
! write(*,*) JIN2
DJIN=DJIN/A2

C NUMERO DE EVALUACIONES EN INCLINACION
IE2=INT((JIN2-JIN1)/DJIN)+1
C NUMERO DE EVALUACIONES EN ARGPER
INARG=INT((ARG2-ARG1)/DARG)+1

OPEN(1,FILE="kozaiq.sal",STATUS="UNKNOWN",ACCESS="APPEND")
```

```

C      a,e,i, LONG NODO = 0, LONG PERI = ARG PERI
      L2G=0.D0
      L2=L2G*G2R
      mu=1.d0
      ho=-mu/(A2*2.0d0)
      DO 101 I101=1,IE2
          E2=DFLOAT(I101-1)*DJIN+JIN1
          IF (E2.LT.CERO) GOTO 101

      write(*,*)'perihelio = ',A2*(UNO-E2)
C      ALCULO EXC EN FUNCION DE H E INC
      peri=A2*(UNO-E2)
      IF (ABS((ACHE/DSQRT(UNO-(E2**2))))).GT.UNO) GOTO 101

      J2=DACOS(ACHE/DSQRT(UNO-(E2**2)))
      J2G=J2/G2R

      DO 102 I102=1,INARG
          P2G=DFLOAT(I102-1)*DARG+ARG1
          P2=P2G*G2R
          limsup=2.D0*PI
          RDIRTOT=0.D0
          Do 103 I103=1,INPLA
              A1=SEM(I103)
              M1=MASA(I103)
              call qtrap(func,0.D0,limsup,ENERGIA)
              RDIRTOT=ENERGIA+RDIRTOT
103      CONTINUE
          WRITE(1,1000) P2G,J2G,E2,ache,peri,a2,RDIRTOT*ho*1.d6

C      INPLA = NUMERO DE PLANETAS EN ORBITAS CIRCULARES

102      CONTINUE
          WRITE(1,*)
101      CONTINUE
C-----
C-----

      CLOSE(1)

```

```

1004  FORMAT(A76)
1000  FORMAT(2F8.3,F12.9,f9.5,f10.5,f8.2,F20.10)
      STOP
      END

      FUNCTION rf(x,y,z)
      REAL*8 rf,x,y,z,ERRTOL,TINY,BIG,THIRD,C1,C2,C3,C4
      PARAMETER (ERRTOL=.08d0,TINY=1.5d-38,BIG=3.d37,THIRD=(1.d0)/(3.d0)
*,C1=(1.d0)/(24.d0),C2=.1d0,C3=(3.d0)/(44.d0),C4=(1.d0)/(14.d0))
      REAL*8 alamb,ave,delx,dely,delz,e2,e3,sqrtx,sqrty,sqrtz,xt,yt,zt
      if(min(x,y,z).lt.0.d0.or.min(x+y,x+z,y+z).lt.TINY.or.max(x,y,
*z).gt.BIG)pause 'invalid arguments in rf'
      xt=x
      yt=y
      zt=z
1      continue
      sqrtx=dsqrt(xt)
      sqrty=dsqrt(yt)
      sqrtz=dsqrt(zt)
      alamb=sqrtx*(sqrty+sqrtz)+sqrty*sqrtz
      xt=.25d0*(xt+alamb)
      yt=.25d0*(yt+alamb)
      zt=.25d0*(zt+alamb)
      ave=THIRD*(xt+yt+zt)
      delx=(ave-xt)/ave
      dely=(ave-yt)/ave
      delz=(ave-zt)/ave
      if(max(dabs(delx),dabs(dely),dabs(delz)).gt.ERRTOL)goto 1
      e2=delx*dely-delz**2
      e3=delx*dely*delz
      rf=(1.D0+(C1*e2-C2-C3*e3)*e2+C4*e3)/dsqrt(ave)
      return
      END

      FUNCTION func(f)

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,J-Z)
      COMMON /elementos/ A1,M1
      COMMON /particula/ A2,P2,J2,E2
      EXTERNAL rf
      TWOPI = 8.0D0*DATAN(1.0D0)

```

```

        PI=TWOPI/2.D0
C      o      *****
C      o      Voy a usar semieje del planeta igual a 1 y Masa sol 1
C      o      *****
        r=(A2*(1.D0-E2**2))/(1.D0+(E2*DCOS(f)))
        z=r*DSIN(P2+f)*DSIN(J2)
        p=DSQRT((r**2)-(z**2))/A1
        zeda=z/A1
        ro=r/A1
        raiz=DSQRT(((1.D0+p)**2)+(zeda**2))
        kcuad=4.D0*p/(raiz**2)
        cte=2.D0*M1/((PI**2)*(A2/A1)*(DSQRT(1.D0-(E2**2))))
        func = cte*(rf(0.D0,(1.D0-kcuad),1.D0))*(ro**2)/raiz

        return

        END
        SUBROUTINE qtrap(func,a,b,s)
        INTEGER JMAX
        REAL*8 a,b,func,s,EPS
        EXTERNAL func
        PARAMETER (EPS=1.D-6, JMAX=30)
CU     USES trapzd
        INTEGER j
        REAL olds
        olds=-1.D30
        do 11 j=1,JMAX
            call trapzd(func,a,b,s,j)
            if (abs(s-olds).lt.EPS*abs(olds)) return
            if (s.eq.0..and.olds.eq.0..and.j.gt.6) return
            olds=s
11     continue
        pause 'too many steps in qtrap'
        END

        SUBROUTINE trapzd(func,a,b,s,n)
        INTEGER n
        REAL*8 a,b,s,func
        EXTERNAL func
        INTEGER it,j
        REAL*8 del,sum,tnm,x
        if (n.eq.1) then
            s=0.5D0*(b-a)*(func(a)+func(b))

```

```
    else
      it=2**(n-2)
      tnm=it
      del=(b-a)/tnm
      x=a+0.5D0*del
      sum=0.D0
      do 11 j=1,it
        sum=sum+func(x)
        x=x+del
11    continue
      s=0.5D0*(s+(b-a)*sum/tnm)
    endif
  return
END
```

Bibliografía

- [1] Arnold, V.I., Kozlov, V.V., Neishtadt, A.I., *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Springer
- [2] Bailey, M.E., Chambers J.E. & Hahn G., 1992. Origin of sungrazers: a frequent cometary end-state *A&A* 257, 315.
- [3] Bailey, M.E., 1983. Is there a dense primordial cloud of comets just beyond Pluto? In: Lagerkvist C.-I. & Rickman H. (eds) *Asteroids Comets and Meteors*. Uppsala University, p.383
- [4] Di Sisto, R.P. & Brunini A. 2007 *Icarus* 190, 224-235
- [5] Gronchi, G.F. & Milani A., 1999. The stable Kozai state for asteroids and comets *A&A* 341, 928-935.
- [6] Gallardo, T., 2006. The occurrence of high order mean motion resonances and Kozai mechanism in the scattered disc. *Icarus* 181, 205,217.
- [7] Gallardo, T., 2006 B. Atlas of the mean motion resonances in the Solar System. *Icarus* 184, 29-38.
- [8] Gomes, R., Gallardo, T., Fernandez, J.A., Brunini, A., 2005. On the origin of the high-perihelion scattered disc: The role of the kozai mechanism and mean motion resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 91, 109-129
- [9] Gomes, R., Fernandez, J.A., Gallardo, T., Brunini, A. The Scattered Disc: Origin, Dynamics and End States. "The Solar System Beyond Neptune"
- [10] Gladman, B. Holdman, M. Grav, T., Kavelaars, J., Nicholson, P., Aksnes, K., Petit, J.-M., 2002. Evidence for an extended Scattered disk. *Icarus* 157, 269-279.
- [11] Hahn, J.M. & Malhotra, R. 1999, *AJ*, 117, 3041.
- [12] Lykawka, P.S. & Mukai, T., 2007. Dynamical classification of trans-neptunian objects: Probing their origin, evolution, and interrelation. *Icarus* 189, 213-232

- [13] Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press.
- [14] Morbidelli, 2002. Modern Celestial Mechanics
- [15] Thomas, F. & Morbidelli A., 1996. The Kozai resonance in the Outer Solar System and the dynamics of long-period comets. *Celestial Mechanics* 64, 209
- [16] Kinoshita H. & Nakai H., 1999. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 75, 125-147
- [17] Kozai, Y. 1962. Secular Perturbations of Asteroids with High Inclination and Excentricity. *The Astronomical Journal* volume 67, number 9