

Evolución de ondas gravitacionales en un Universo cerrado

Florencia Benítez Martínez / Orientador: Dr. Javier Olmedo

14 de junio de 2013

Trabajo especial de Licenciatura en Ciencias Físicas, opción Astronomía.
Facultad de Ciencias, UdelaR. Generación 2009.

Índice general

1. Introducción	4
2. Relatividad General en el vacío	6
2.1. Relatividad General y Ecuación de Einstein	6
2.2. Formulación lagrangiana de las Ecuaciones de Einstein	12
2.3. Formulación hamiltoniana de las Ecuaciones de Einstein	16
3. Modelo cosmológico homogéneo e isótropo	23
3.1. Homogeneidad e isotropía	23
3.2. Dinámica de un Universo homogéneo e isótropo	26
3.3. Fenómenos cosmológicos	30
3.3.1. Corrimiento al rojo	30
3.3.2. Horizonte de partículas	31
3.4. La evolución de nuestro Universo	33
3.5. ¿Por qué Modelos Inflacionarios?	34
4. Campo escalar con masa acoplado a gravedad	35
4.1. Formulación canónica	35
4.2. Modelo de Friedmann no perturbado	37
4.3. Modelo Inflacionario	39
4.3.1. Régimen “ <i>slow-roll</i> ”	39
4.3.2. Número de “ <i>e-folds</i> ”	40
4.3.3. Inflación para nuestro potencial	40
4.4. Modelo de Friedmann perturbado	41
4.5. Ondas tensoriales	43
5. Estudio numérico	45
5.1. Campo escalar sin masa	45
5.2. Inflación (Campo escalar con masa)	47
6. Conclusiones y trabajo a futuro	52
6.1. Conclusiones	52
6.2. Trabajo a futuro	52
7. Apéndices	53
7.1. Apéndice A: Armónicos en la tres-esfera	53
7.1.1. Armónicos escalares	53
7.1.2. Armónicos vectoriales	53

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
7.1.3. Armónicos tensoriales	54
7.1.4. Ortogonalidad y normalización	55
7.2. Apéndice B: Acción y ecuaciones del campo	56

Capítulo 1

Introducción

La interacción gravitatoria, a pesar de ser una de las primeras en ser expresada formalmente en un lenguaje matemático, no fue descrita en su versión más moderna hasta 1915, gracias a Albert Einstein, quién consigue formular una teoría completamente nueva sobre gravitación y espacio-tiempo, llamada teoría general de la relatividad.¹ Esta nueva teoría plantea, en términos generales, que un campo gravitacional se puede identificar con la curvatura del espacio-tiempo, donde el espacio y el tiempo se combinan en un único continuo, volviéndolos dos conceptos inseparables. Cabe mencionar que dicha curvatura del espacio-tiempo se relaciona con la distribución de materia, representada por el tensor energía-momento, a través de las ecuaciones de Einstein, y viceversa.²

La relatividad general es una teoría con la particularidad de que es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas. En consecuencia, se trata de una teoría con simetrías gauge. Esto a su vez significa que el número de grados de libertad físicos es menor que el número de variables dinámicas. La existencia de simetrías de gauge adquiere un significado claro cuando uno adopta una formulación hamiltoniana³ gracias a la presencia de vínculos, que son justamente los generadores, en el espacio de fases, de las transformaciones de gauge anteriormente mencionadas.

Además, ha sido capaz de explicar exitosamente distintos fenómenos observados, como es por ejemplo la precesión de la órbita de Mercurio así como la deflexión de la luz al pasar cerca de un objeto masivo. Asimismo, ha predicho la existencia de los agujeros negros e incluso la evolución del Universo a gran escala⁴. Por ejemplo, las observaciones de la radiación cósmica de fondo indican que el Universo, a gran escala, está cerca de la homogeneidad y la isotropía⁵. Si uno pide a la teoría de la relatividad general que sea compatible con esas simetrías, se llega al conocido modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Las soluciones de este modelo describen o bien un Universo (homogéneo e isótropo) en expansión u otro en contracción. La solución expansiva es particularmente interesante ya que es compatible con la evolución de nuestro Universo tal y como la entendemos hoy en día, y que presupone que el mismo surge a partir de una singularidad espacio-temporal, conocida como Big Bang o Gran Explosión, para expandirse hasta su estado actual, que consta de una expansión cuantificada por la Ley de Hubble. Además, de acuerdo con la teoría, un Universo homogéneo e isótropo lleno de materia ordinaria, puede dar lugar a una expansión indefinida o una que se frena lentamente, hasta producirse una contracción, lo que se conoce con el término Big Crunch o Gran Colapso⁶.

A pesar del gran éxito que han tenido este tipo de modelos cosmológicos en explicar muchas de las propiedades hoy observadas en el Universo, existen ciertos inconvenientes que obligan a explorar modelos complementarios, como es la idea de inflación cósmica (ver, por ejemplo, Refs. 7, 8 y 9). Ésta consiste en una expansión abrupta del Universo en sus instantes iniciales, gracias a

la cual se pueden resolver los problemas del horizonte de partículas y el de la planitud, y además proporciona un marco natural para la generación y evolución de pequeñas inhomogeneidades que sirvan de semillas para la formación de estructuras de acuerdo con las que hoy en día observamos.

En nuestro trabajo estudiaremos algunas de las soluciones de la ecuación de Einstein, en un espacio-tiempo definido por una variedad cerrada, compacta y sin borde (una tres-esfera), basados en las evidencias observacionales (y en el principio cosmológico), por lo que trabajaremos bajo las hipótesis de homogeneidad e isotropía, y con un contenido material que consistirá en un campo escalar con masa⁴. También consideraremos estructuras a gran escala, las cuales representaremos como pequeñas perturbaciones que asumiremos dentro de las condiciones iniciales del problema (ver Refs. 10 y 11). Para ello, haremos un tratamiento perturbativo hasta segundo orden en el hamiltoniano, y nos concentraremos en el estudio de perturbaciones de naturaleza puramente tensorial (ondas gravitacionales). Finalmente, realizaremos un estudio numérico para determinar las condiciones que dan lugar a un Universo inflacionario, así como la evolución de las perturbaciones tensoriales que se propagan sobre este espacio-tiempo dinámico.

Capítulo 2

Relatividad General en el vacío

Existieron dos ideas motivadoras para que Albert Einstein formulara una teoría completamente nueva acerca de la gravitación y el espacio-tiempo. La primera idea es que todos los cuerpos que son influenciados por la gravedad caen de la misma manera en un campo gravitacional. Este es el llamado *Principio de equivalencia*. Como el movimiento es independiente de la naturaleza de los cuerpos, la trayectoria de los cuerpos en caída libre define un conjunto de curvas preferenciales en el espacio-tiempo, independiente de esa naturaleza. Esto sugiere la posibilidad de que las propiedades del campo gravitacional y las de la estructura del espacio-tiempo estén íntimamente relacionadas.

La segunda idea que motivó la formulación de la Teoría de la relatividad general es el llamado *Principio de Mach*. En Relatividad Especial, la estructura del espacio-tiempo es dada una vez y para todo momento y no se ve afectada por la materia presente. Mach, (tanto como Riemann y algunos otros) encontró esta idea insatisfactoria. Planteó que la materia existente en el Universo, debía contribuir a la definición local del espacio-tiempo. Einstein tomó esta idea para buscar una teoría donde la estructura del espacio-tiempo se vea influenciada por la presencia de materia.

La nueva teoría del espacio, el tiempo, y la gravitación (relatividad general), propuesta por Einstein, establece lo siguiente: las propiedades del espacio-tiempo, intrínsecas e independientes del observador, son descritas por una métrica, como en relatividad especial. Sin embargo, la métrica no necesariamente debe tener la forma plana que tenía en relatividad especial. En efecto, la curvatura o desviación de la métrica del espacio-tiempo, es considerada en los efectos físicos que normalmente suelen atribuirse al campo gravitacional. Además, la curvatura del espacio-tiempo está relacionada con el tensor de energía-momento a través de una ecuación postulada por Einstein.

Hasta ahora, las predicciones de la teoría de la Relatividad General están en perfecta concordancia con experimentos y observaciones.

2.1. Relatividad General y Ecuación de Einstein

Así como la teoría de Maxwell generalizó la electrostática de Coulomb y la incorporó al marco de la relatividad especial, uno pretendería desarrollar una nueva teoría de la gravitación, que generalice la teoría de Newton y la haga compatible con la relatividad especial. Sin embargo, Einstein tomó un camino diferente y, en su lugar, desarrolló la relatividad general, una nueva teoría de la estructura del espacio-tiempo y la gravitación.

Para ver la relevancia del Principio de Equivalencia y desarrollar un nuevo punto de vista en gravitación, consideremos cómo medimos un campo electromagnético en relatividad espe-

cial. Lo primero es establecer “observadores de fondo”, los cuales no están sujetos a la fuerza electromagnética o a ningún otro tipo de fuerza. Estos observadores son llamados inerciales y satisfacen la ecuación geodésica de movimiento $u^a \partial_a u^b = 0$,¹ donde u^a es el cuadvivector velocidad, o cuadvivelocity y ∂_a es el operador derivada asociado con la métrica del espacio-tiempo. Luego establecemos un cuerpo cargado de prueba. La línea de mundo² de este cuerpo cumple: $u^a \partial_a u^b = \frac{q}{m} F^b{}_c u^c$ (siendo ésta la ecuación de movimiento de una carga q , de masa m , moviéndose en un campo descrito por el tensor F_{ab}) y, observando la desviación del movimiento inercial, podemos determinar F_{ab} .

Si aplicamos este procedimiento a la gravitación, inmediatamente nos enfrentamos a un serio problema. Por el principio de equivalencia, no tenemos forma de aislar a un observador o cuerpo de la acción de la fuerza gravitacional, por lo tanto, no existe un procedimiento físico directo para construir observadores inerciales. Al establecer un observador, este se moverá de la misma manera en que lo hará el cuerpo de prueba, por lo que no tendremos un “movimiento de fondo” para comparar con dicho cuerpo. En estas condiciones, no somos capaces de medir de una forma simple y directa la fuerza del campo gravitacional.

El marco básico de la teoría de la relatividad general surge de considerar, en principio, que no podemos construir observadores inerciales y medir la fuerza gravitacional. Esto se logra bajo la siguiente hipótesis: *La métrica del espacio-tiempo no es plana como se asume en relatividad especial. Las líneas de mundo de los cuerpos que caen libremente bajo la acción de un campo gravitacional son simplemente geodésicas de la métrica del espacio-tiempo (curva)*. De esta manera, los “observadores de fondo” coinciden con lo que previamente se veía como el movimiento en un campo de fuerza gravitacional. Como resultado, no tenemos ninguna forma significativa de describir la gravedad como la fuerza de un campo. Aunque la fuerza gravitacional absoluta no tenga significado, si lo tiene la fuerza gravitacional relativa (fuerza de marea), ya que puede ser medida mediante la observación de la aceleración relativa de dos cuerpos libres en el campo gravitacional. Esta aceleración relativa está directamente relacionada con la curvatura del espacio-tiempo de la siguiente manera. Sea $\gamma_s(t)$ una familia de geodésicas suave de un parámetro (Fig.(2.1)) tal que, para cada $s \in \mathbb{R}$, la curva γ es una geodésica parametrizada por t y la aplicación $(t, s) \rightarrow \gamma_s(t)$ es suave, al igual que su inversa. Sea Σ una sub-variedad bidimensional abarcada por las curvas $\gamma_s(t)$. Entonces, $T^a = (\partial/\partial t)^a$ es un campo vectorial tangente a la familia de geodésicas que satisface $T^a \nabla_a T^b = 0$, donde ∇_a es el operador derivada asociado a g_{ab} .³

$X^a = (\partial/\partial s)^a$ es llamado *vector de desviación* y representa un desplazamiento infinitesimal a una geodésica cercana.

Dicho esto, la aceleración relativa está dada por la ecuación de la desviación geodésica,

$$a^a = -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d, \quad (2.1)$$

donde R_{cbd} es el tensor de Riemann. El Tensor de Riemann es un objeto matemático que codifica la información de la curvatura del espacio. Puede escribirse en función de los símbolos de Christoffel como

$$R_{ab} = \Sigma_c R_{acb}{}^c = \Sigma_c \frac{\partial}{\partial x^c} \Gamma^c{}_{ab} - \frac{\partial}{\partial x^a} (\Sigma_c \Gamma^c{}_{cb}) + \Sigma_{d,c} (\Gamma^d{}_{ab} \Gamma^c{}_{dc} - \Gamma^d{}_{cb} \Gamma^c{}_{da}). \quad (2.2)$$

¹Ante la repetición de dos índices, hacemos uso del criterio de sumación de Einstein.

²Línea que une dos eventos en el espacio tiempo. Representa la trayectoria de un cuerpo.

³La derivada covariante ∇_a de un vector contravariante t^b es: $\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b{}_{ac} t^c$ donde $\Gamma^b{}_{ac}$ son los símbolos de Christoffel definidos como $\Gamma^b{}_{ac} = \frac{1}{2} \Sigma_d g^{bd} \left\{ \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial x^d} \right\}$. La condición $\nabla_a g_{bc} = 0$ fija los símbolos de Christoffel en la ecuación anterior.

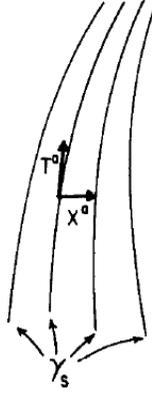


Figura 2.1: Familia uniparamétrica de geodésicas γ_s , con tangente T^a y vector de desviación X^a .

En relatividad general, no afirmamos que el espacio-tiempo sea la variedad \mathbb{R}^4 con una métrica plana η_{ab} definida sobre ella. Ésta es una posibilidad correspondiente a fuerzas que no son de marea, es decir, fuerzas que no correspondan a un campo gravitacional, pero no es la única posibilidad. El marco de la relatividad permite que la métrica de Lorentz, g_{ab} , del espacio-tiempo sea curva. De hecho, ésta afirma que el espacio-tiempo debe ser curvo en todas las situaciones donde exista un campo gravitacional. Dado que estamos permitiendo geometrías curvas, es aún más natural permitir que la estructura de la variedad M que caracteriza en parte el espacio-tiempo sea arbitraria. La característica final y crucial de la relatividad general es la ecuación de Einstein, que relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de masa. Antes de presentar esta ecuación debemos discutir las leyes naturales de la física, bajo el marco de la estructura del espacio-tiempo dado por la relatividad general. *El espacio-tiempo es una variedad M , en la cual se define la métrica de Lorentz g_{ab} .*

Las leyes de la física en relatividad general están gobernadas por dos principios básicos: (i) el *Principio de covarianza*, que establece que las ecuaciones de la física deben mantener la misma forma para cualquier marco de referencia; (ii) las ecuaciones de la relatividad general deben reducirse a las que satisfacen la relatividad especial, donde g_{ab} es plana.

Podemos representar las cantidades físicas en relatividad general mediante el mismo tipo de campos tensoriales que en relatividad especial. Así, el movimiento de una partícula continúa siendo representado por una curva de tiempo (en la métrica g_{ab}); los fluidos perfectos son descritos en términos de una quadri-velocidad u^a , una densidad ρ , y una presión P ; el campo electromagnético es representado por un tensor antisimétrico F_{ab} .

Los dos principios mencionados sugieren seguir las siguientes reglas para pasar de las ecuaciones de relatividad especial a las de relatividad general: en las ecuaciones de la relatividad especial, reemplazar la métrica η_{ab} por g_{ab} , y correspondientemente reemplazar el operador derivada ∂_a asociado a η_{ab} por el operador derivada ∇_a asociado con g_{ab} .

Entonces, en relatividad general, definimos nuevamente la quadri-velocidad, u^a , de una partícula como la tangente a su línea del mundo. Una partícula libre satisface la ecuación geodésica de movimiento

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (2.3)$$

Si la aceleración

$$a^b = u^a \nabla_a u^b \quad (2.4)$$

de la partícula es distinta de cero decimos que una fuerza

$$f^b = m a^b \quad (2.5)$$

actúa sobre la partícula de masa m . Por ejemplo, si la partícula tiene masa m y carga q , y está ubicada en un campo electromagnético F_{ab} , ésta satisface la ecuación de fuerza de Lorentz:

$$u^a \nabla_a u^b = \frac{q}{m} F^b{}_c u^c, \quad (2.6)$$

donde los índices “suben” o “bajan” a causa de g_{ab} de la siguiente manera: $F^b{}_c = g^{bd} F_{dc}$.

El cuadri-momento de la partícula es definido por

$$p^a = m u^a. \quad (2.7)$$

En particular, la energía de la partícula determinada por un observador que está presente en el evento, en la línea del mundo de la partícula, en el momento en que esta energía es medida, es

$$E = -p_a v^a, \quad (2.8)$$

donde v^a es la cuadri-velocidad del observador.

En relatividad general, las distribuciones continuas de materia y campos son descritas por un tensor de energía-momento T_{ab} . El tensor de energía-momento de un fluido perfecto está dado por

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (2.9)$$

y satisface la ecuaciones de movimiento

$$\nabla^a T_{ab} = 0, \quad (2.10)$$

lo que da lugar a

$$u^a \nabla_a \rho + (\rho + P) \nabla^a u_a = 0 \quad (2.11)$$

$$(P + \rho) u^a \nabla_a u_b + (g_{ab} + u_a u_b) \nabla^a P = 0. \quad (2.12)$$

En cuanto a la ecuación de continuidad para una familia de observadores representada por un campo vectorial temporal⁴ y unitario, v^a , tendríamos $\nabla^a (T_{ab} v^b) = 0$. Si pudiéramos encontrar dicho campo vectorial, el cual es covariantemente constante, se cumpliría que $\nabla_a v_b = 0$ (lo que obviamente se limita a $\nabla_{(a} v_b) = 0$)

En general, en el espacio-tiempo curvo, no podemos encontrar v^a que satisfaga $v^a v_a = -1$ y $\nabla_{(a} v_b) = 0$. De hecho, la ecuación $\nabla_{(a} v_b) = 0$ se sostiene si y sólo si v^a genera un grupo de isometrías⁵ uniparamétricas.

⁴Llamamos “vector temporal” a un vector de norma menos uno. A los vectores que tienen norma uno los llamamos “vector espacial”. Finalmente, a los que tienen norma igual a cero, les llamamos “vector nulo” (o “vector tipo luz”).

⁵Una isometría es una aplicación matemática que conserva las distancias y, por lo tanto, la métrica g_{ab}

Este argumento indica que la ecuación (2.10) no implica una estricta conservación de la energía. Esto tiene sentido físico, ya que las fuerzas de marea pueden hacer trabajo sobre el fluido y esto puede hacer variar su energía. Sin embargo, si consideramos una región del espacio-tiempo de dimensión pequeña comparada con el radio de curvatura, entonces las fuerzas de marea pueden realizar poco trabajo, y la energía del fluido debe conservarse en su mayoría. Entonces sobre esta pequeña región del espacio-tiempo es posible encontrar un campo vectorial con $\nabla_{(a}v_{b)} \approx 0$, y la ecuación (2.10) debe dar lugar a la conservación de la energía medida por los observadores. Así, dicha ecuación podría ser interpretada como una conservación de la energía del material local sobre pequeñas regiones del espacio-tiempo. Vamos a extender la ecuación desde fluidos perfectos a materia y campos.

La generalización más natural de la ecuación que satisface un campo escalar de Klein-Gordon⁶ en un espacio-tiempo curvo, estaría dada por la regla de la mínima sustitución, $\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}$, $\partial_a \rightarrow \nabla_a$, de modo que

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi = 0. \quad (2.13)$$

El tensor de energía-momento del campo es

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + m^2 \phi^2) \quad (2.14)$$

y satisface $\nabla^a T_{ab} = 0$.

Debemos resaltar que existen otras generalizaciones posibles de la ecuación de Klein-Gordon, que son consistentes con los dos principios. Por ejemplo, una generalización es la ecuación

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi - \alpha R \phi = 0, \quad (2.15)$$

donde α es una constante. De hecho, esta ecuación con $\alpha = 1/6$ surge naturalmente a causa de sus propiedades de invariancia conforme.

Hemos descrito como es tratada la gravitación identificando ésta con la geometría del espacio-tiempo curva y hemos demostrado algunas leyes de la física en este nuevo marco. Sólo resta describir las leyes que satisface la métrica del espacio-tiempo. Es aquí donde entra en juego el principio de Mach. En lugar de prescribir la geometría del espacio-tiempo por adelantado, la relatividad general afirma que la geometría del espacio-tiempo es influenciada por la distribución de materia en el Universo, en concordancia con algunas de las ideas de Mach. De esta manera, la métrica del espacio-tiempo no sólo se encuentra en las leyes de la física como un ente externo y predeterminado, sino también como una variable dinámica que responde al contenido material del espacio-tiempo.

Pero, ¿cuál es la ecuación que describe la relación entre la geometría del espacio-tiempo y la distribución de materia? Una pista importante proviene de comparar la descripción de la fuerza de marea en la gravitación Newtoniana con su descripción en relatividad general. En la teoría Newtoniana, el campo gravitacional puede ser representado por un potencial, ϕ . La aceleración por mareas de dos partículas cercanas está dada por $-\left(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\nabla} \phi$, donde \vec{x} es el vector que indica la separación entre las partículas. Por otro lado, en relatividad general, podemos ver de la ecuación de la desviación geodésica 2.1 que la aceleración de dos partículas cercanas está dada por $-R_{cbd}{}^a v^c x^b v^d$, donde v^a es la quadri-velocidad de las partículas y x^a es el vector de desviación. Esto sugiere hacer la correspondencia

$$R_{cbd}{}^a v^c v^d \longleftrightarrow \partial_b \partial^a \phi. \quad (2.16)$$

⁶En teoría de campos, un campo escalar de Klein-Gordon es tal que satisface la ecuación general de Klein-Gordon, que describe, por ejemplo, a los electrones relativistas.

Sin embargo, la ecuación de Poisson nos dice que

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho, \quad (2.17)$$

donde ρ es la densidad de materia (energía). Hemos utilizado unidades donde $G = c = 1$, lo que mantendremos de aquí en adelante. Como hemos discutido con anterioridad, en relatividad especial y general, las propiedades de energía de la materia son descritas por el tensor de energía-momento T_{ab} , entonces tenemos la correspondencia

$$T_{ab}v^av^b \longleftrightarrow \rho, \quad (2.18)$$

donde v^a es la cuadri-velocidad del observador.

Las correspondencias (2.16) y (2.18), junto con la ecuación (2.17) sugieren que $R_{cad}{}^av^c v^d = 4\pi T_{cd}v^c v^d$, lo que lleva a la ecuación del campo $R_{cd} = 4\pi T_{cd}$.

Sin embargo, esta ecuación postulada originalmente por Einstein tiene un serio defecto. Como ya dijimos, el tensor de energía-momento satisface $\nabla^c T_{cd} = 0$. Por otro lado, la identidad de Bianchi,⁷ nos lleva a $\nabla^c (R_{cd} - \frac{1}{2}g_{cd}R) = 0$. Entonces, la igualdad entre R_{cd} y $4\pi T_{cd}$ implicaría que $\nabla_d R = 0$, es decir, que R y, por lo tanto $T = T^a{}_a$, es una constante a lo largo de la evolución del Universo. Ésta es una restricción no física sobre la distribución de materia, y nos obliga a desechar esta ecuación, tal como lo hizo Einstein en 1915.

Sin embargo, esta dificultad, también nos sugiere la resolución. Si en su lugar consideramos la ecuación

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.19)$$

donde G_{ab} es el llamado *Tensor de Einstein*, no existe ningún conflicto entre la identidad de Bianchi y la conservación local de la energía. De hecho, bajo la condición impuesta por esta última ecuación, la identidad de Bianchi implica la conservación local de la energía. Tomando la traza de la ecuación (2.19), tenemos

$$R = -8\pi T \quad (2.20)$$

y, por lo tanto

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right). \quad (2.21)$$

La ecuación (2.19) es la ecuación de campo deseada en relatividad general. Es conocida como la *ecuación de Einstein*¹, y fue escrita por éste en 1915.

En realidad, estas ecuaciones admiten un término adicional,

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.22)$$

donde Λ es una nueva constante fundamental de la naturaleza llamada *constante cosmológica*². La motivación original que llevó a Einstein a introducir este parámetro fue la de proporcionar una solución de tipo cosmológica estática. Pero ésta requiere un ajuste exacto de los parámetros que la determinan y además resulta ser inestable si uno se desvía ligeramente de esa elección. Luego de que las observaciones de corrimiento al rojo realizadas por Hubble en 1929 demostraran la expansión del Universo, la motivación original de la introducción de Λ perdió sentido. Sin embargo, esta constante es utilizada en numerosas ocasiones, ante discrepancias entre teoría y observación. De aquí en más, asumiremos $\Lambda = 0$.

⁷Identidad de Bianchi: $\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0 \Rightarrow \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0 \Rightarrow \nabla_a R_c{}^a + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = 0$

Como conclusión, el contenido general de la relatividad general, puede ser resumido como: *El espacio-tiempo es una variedad M en la se define la métrica de Lorentz g_{ab} . La curvatura de g_{ab} está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo por la ecuación de Einstein (2.19).*

En nuestro trabajo estudiaremos algunas soluciones de esta ecuación y sus consecuencias físicas. Antes de proseguir, debemos mencionar tres observaciones acerca de la ecuación de Einstein.

La primera observación implica su carácter matemático. Si utilizamos un sistema de coordenadas y expresamos $R_{\mu\nu}$ en términos de $g_{\mu\nu}$, vemos que ésta depende de la derivada hasta segundo orden de $g_{\mu\nu}$, y que no es lineal con $g_{\mu\nu}$ (aunque si lo es respecto a su derivada segunda). Entonces, la ecuación de Einstein es equivalente a dos sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, no lineales, para las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$. Para la métrica de Lorentz estas ecuaciones son de carácter hiperbólico.⁸

La segunda observación trata acerca de la forma en que ver la ecuación de Einstein. Por un lado, la ecuación (2.19) es un análogo a la ecuación de Maxwell, $\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b$, con el tensor de momento-energía T_{ab} como fuente de campo gravitacional, así como j_a actúa como fuente de campo electromagnético. La diferencia radica en que tiene sentido resolver la ecuación de Maxwell especificando j_a y luego hallar A_a , pero no tiene sentido resolver la ecuación de Einstein especificando T_{ab} , ya que T_{ab} depende de g_{ab} . Entonces, en relatividad general, debemos resolver simultáneamente para la métrica del espacio-tiempo y la distribución de materia. Esto contribuye a la dificultad para resolver la ecuación de Einstein cuando las fuentes están presentes.

La última observación involucra las ecuaciones de movimiento de la materia. La ecuación de Einstein implica que $\nabla^a T_{ab} = 0$, y esta relación contiene información sobre el comportamiento de la materia; más generalmente, implica que cualquier cuerpo lo suficientemente “pequeño”, cuya autogravedad sea lo suficientemente “débil”, debe moverse en una geodésica¹³. Así, la ecuación de Einstein implica la *hipótesis geodésica* que la línea de mundo de los cuerpos de prueba son geodésicas del espacio-tiempo.

En conclusión, el contenido dinámico de la relatividad general es expresado completamente por la ecuación de Einstein. De todos modos, incluso en un contexto puramente clásico, es conveniente y útil tener la formulación lagrangiana y hamiltoniana de la relatividad general. Esto es lo que veremos en las siguientes secciones.

2.2. Formulación lagrangiana de las Ecuaciones de Einstein

Comenzaremos esta sección discutiendo el significado de la formulación Lagrangiana en teoría de campos. Consideremos una teoría que involucre un campo tensorial definido en una variedad M . Suprimiremos todos los posibles índices y denotaremos el campo simplemente como ψ . Sea $S[\psi]$ una relación funcional sobre ψ , es decir, S es una aplicación que va de las configuraciones de campo en M , en los números. Sea ψ_λ una familia uniparamétrica suave⁹ de las configuraciones de campo, comenzando por ψ_0 , el cual satisface las condiciones de borde. Denotamos $\frac{d\psi}{d\lambda} |_{\lambda=0}$ como $\delta\psi$. Suponemos que $\frac{dS}{d\lambda}$ existe en $\lambda = 0$ para estas familias de un parámetro comenzando por ψ_0 . Supongamos, además, que existe un campo tensorial suave χ , el cual es el dual de ψ .

⁸Una ecuación hiperbólica en derivadas parciales es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden del tipo: $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$, donde la matriz $Z = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ tiene un determinante negativo. Un ejemplo de ecuación diferencial hiperbólica es la ecuación de ondas.

⁹Una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es suave (o C^∞) si existen todas sus derivadas parciales de cualquier orden.

Entonces, si ψ es un campo tensorial de tipo (k, l) ,¹⁰ χ será de tipo (l, k) , de modo que para todas estas familias tenemos

$$\frac{dS}{d\lambda} = \int_M \chi \delta\psi. \quad (2.23)$$

Entonces, decimos que S es *funcionalmente diferenciable* en ψ_0 . Llamamos a χ la derivada funcional¹¹ de S y la denotamos

$$\chi = \left[\frac{\delta S}{\delta \psi} \right]_{\psi_0}. \quad (2.24)$$

Consideremos ahora un funcional S de la forma

$$S[\psi] = \int_M \mathcal{L}[\psi], \quad (2.25)$$

donde \mathcal{L} es una función local de ψ y de un número finito de sus derivadas,

$$\mathcal{L}|_x = \mathcal{L}(\psi(x), \nabla\psi(x), \dots, \nabla^k\psi(x)). \quad (2.26)$$

Supongamos que S es funcionalmente diferenciable y que las configuraciones del campo ψ que extremizan S ,

$$\left[\frac{\delta S}{\delta \psi} \right]_{\psi} = 0, \quad (2.27)$$

son precisamente las que son soluciones de la ecuación de campo para ψ . S es llamada *acción*, \mathcal{L} es llamada *densidad lagrangiana*, y la especificación de \mathcal{L} es lo que llamamos Formulación lagrangiana de la teoría de campos.

La Formulación lagrangiana de la teoría de campos es prácticamente análoga a la Formulación lagrangiana de la mecánica de la partícula. En la mecánica de la partícula se especifica una acción funcional de la trayectoria de la partícula como la integral de una función lagrangiana sobre esa misma trayectoria. El problema variacional análogo a (2.27) se trata precisamente enfocando nuestra atención en trayectorias finitas y buscando los extremos de la acción, respecto a las variaciones de camino que dejan los extremos fijos. Por analogía, para plantear nuestro problema variacional en el caso del campo, debemos enfocar la atención en una región compacta, U , de M y considerar las familias de un parámetro ψ_λ .

Continuando con la analogía, tenemos que en relatividad general, la variable de campo es la métrica del espacio-tiempo, g_{ab} , definida en una variedad de dimensión cuatro, M . En este caso, un leve inconveniente surge de la naturaleza del elemento de volumen a usarse en las integrales (2.23) y (2.25); este es el volumen ϵ_{abcd} determinado por g_{ab} , por la ecuación $\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n!$, donde n es la dimensión de la variedad y $s = 1$ para la métrica Lorentziana. Consecuentemente, el elemento de volumen depende de la variable de campo, por tanto, su variación debe ser tenida en cuenta a la hora de calcular las derivadas funcionales. Una forma de manejar esta situación es definir \mathcal{L} como un tensor antisimétrico de cuarto orden en lugar de un escalar incorporando el elemento de volumen en \mathcal{L} . Esto requiere hacer una modificación similar en nuestra definición de derivada funcional. En cambio, seguiremos un procedimiento más

¹⁰Un tensor, T , de tipo (k, l) sobre V es una aplicación multilineal $T : V_{(1)}^* \times \dots \times V_{(k)}^* \times V_{(1)} \times \dots \times V_{(l)} \rightarrow \mathbb{R}$ donde V un espacio vectorial de dimensión finita y V^* es su espacio vectorial dual

¹¹La derivada funcional es una generalización de la derivada usual que se presenta en el cálculo de variaciones. En una derivada funcional, en vez de diferenciar una función con respecto a una variable, uno diferencia una funcional con respecto a una función. Un funcional es una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

simple que consiste en introducir un elemento de volumen fijo $e_{abcd} = e_{[abcd]}$ en M y definiendo las integrales sobre M respecto a e_{abcd} en lugar de ϵ_{abcd} . Una forma de hacerlo (al menos en una porción de M) es elegir un sistema de coordenadas y tomar e_{abcd} como el elemento de volumen asociado. Dado que dos elementos de volumen arbitrarios difieren entre sí, en cada punto, en un factor escalar, tenemos

$$\epsilon_{abcd} = f e_{abcd}. \quad (2.28)$$

Para determinar el valor de f , debemos tener en cuenta que ϵ_{abcd} es un tensor totalmente antisimétrico, por lo que debe cumplir:

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^s n! \delta^{[a_1}_{b_1} \delta^{a_2}_{b_2} \dots \delta^{a_n]}_{b_n} \quad (2.29)$$

y su derivada covariante cumple

$$\nabla_b \epsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (2.30)$$

El elemento de volumen que cumple éstas condiciones es el que surge de sustituir f por $\sqrt{-g}$, donde g es el determinante de la matriz de componentes g_{ab} de la métrica en esa base. Entonces

$$\epsilon = \sqrt{-g} \epsilon_{abcd} dx^a dx^b dx^c dx^d \sim \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.31)$$

Dado un elemento de volumen e_{abcd} en M , definimos un tensor densidad $T^{a\dots b}_{c\dots d}$ como un tensor que puede ser expresado de la forma

$$T^{a\dots b}_{c\dots d} = \sqrt{-g} \tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}, \quad (2.32)$$

donde $\tilde{T}^{a\dots b}_{c\dots d}$ es un tensor cuyo valor no depende de la elección de e_{abcd} . Para que la acción S sea independiente de e_{abcd} , es necesario que la densidad lagrangiana \mathcal{L} sea una densidad escalar. Similarmente, para que $\frac{dS}{d\lambda}$ sea independiente de e_{abcd} , las derivadas funcionales de S deben ser densidades tensoriales.

Demostremos que (exceptuando los términos de borde) la densidad escalar

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R \quad (2.33)$$

es una densidad Lagrangiana para la ecuación de Einstein en el vacío. La acción correspondiente,

$$S[g^{ab}] = \int \mathcal{L}_G e, \quad (2.34)$$

es conocida como *acción de Hilbert-Einstein*. Aquí hemos escrito $e = e_{abcd} dx^a dx^b dx^c dx^d = d^4x$ con el fin de enfatizar el uso de este elemento de volumen. Además, por conveniencia, hemos tomado la inversa de la métrica g^{ab} , en lugar de g_{ab} , como la variable del campo. Para una variación de un parámetro definimos $\delta g^{ab} = dg^{ab}/d\lambda$.

Para una familia de un parámetro empezando de g^{ab} , tenemos

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\lambda} = \sqrt{-g} (\delta R_{ab}) g^{ab} + \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} + R \delta(\sqrt{-g}). \quad (2.35)$$

Además,

$$g^{ab} \delta R_{ab} = \nabla^a v_a, \quad (2.36)$$

12

donde

$$v_a = \nabla^b (\delta g_{ab}) - g^{cd} \nabla_a (\delta g_{cd}). \quad (2.37)$$

La traza de una matriz cumple:

$$\text{tr} \left[\frac{dA}{dt} A^{-1} \right] = \frac{1}{\det(A)} \frac{d}{dt} [\det(A)]. \quad (2.38)$$

Por lo tanto,

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (2.39)$$

De esta manera, llegamos a que

$$\frac{dS_G}{d\lambda} = \int \frac{d\mathcal{L}_G}{d\lambda} = \int \nabla^a v_a \sqrt{-g} e + \int \left(R_{ab} + \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \delta g^{ab} \sqrt{-g} e. \quad (2.40)$$

El primer término de la ecuación (2.40) es la integral de una divergencia, $\nabla^a v_a$, con respecto al elemento de volumen natural $\epsilon = \sqrt{-g} e$. De hecho, por el teorema de Stockes esta integral contribuye a un término de borde. Dado que en nuestro modelo estamos considerando una variedad compacta sin borde, podemos descartar ese término. Por tanto, encontramos que

$$\frac{\delta S_G}{\delta g^{ab}} = \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right) \quad (2.41)$$

y vemos que de las ecuaciones (2.27) y (2.41) resulta la ecuación de Einstein en el vacío, tal como queríamos. Desde el punto de vista lagrangiano, la ecuación de Einstein surge de una manera muy natural, ya que la densidad lagrangiana (2.33), es una de las densidades escalares más simples que se pueden construir de la métrica del espacio-tiempo.

Es interesante notar que, en lugar de ver solamente la métrica como variable de campo de la relatividad general, podemos ver la métrica y el operador derivada ∇_a como variables independientes.

Observemos que si utilizamos la misma densidad lagrangiana (2.33) pero vemos R_{ab} como una función únicamente del operador derivada (independiente de g^{ab}) y variamos la acción de Palatini,

$$\varphi_G [g^{ab}, \nabla_a] = \int \sqrt{-g} R_{ab} g^{ab} e, \quad (2.42)$$

con respecto a g^{ab} y ∇_a , recuperamos la ecuación de Einstein (2.41) junto con la condición de compatibilidad de la métrica $\nabla_c g^{ab} = 0$ en el operador derivada.

Si pasamos de la ecuación de Einstein en el vacío al caso en que existe un campo con masa, también es posible realizar una formulación lagrangiana de una manera muy simple. Primero, debemos encontrar una densidad lagrangiana adecuada para dicho campo con masa en el espacio-tiempo.

Para obtener las ecuaciones de Einstein acopladas para un campo con masa, construimos una densidad lagrangiana total, \mathcal{L} , mediante la adición de una densidad lagrangiana \mathcal{L}_G con un múltiplo de la densidad lagrangiana del campo con masa, \mathcal{L}_M ,

¹²Esta igualdad aparece al linealizar la ecuación de Einstein para $\gamma_{ab} = \left. \frac{dg_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$, tal que, $0 = \dot{R}_{ac} = -\frac{1}{2} g^{bd0} \nabla_a^0 \nabla_c \gamma_{bd} - \frac{1}{2} g^{bd0} \nabla_b^0 \nabla_d \gamma_{ac} + g^{bd0} \nabla_b^0 \nabla_{(c} \gamma_{a)d}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \alpha_M \mathcal{L}_M, \quad (2.43)$$

donde α_M es una constante. Dado que \mathcal{L}_G no depende del campo con masa, la variación de la acción total, S , con respecto a él, da lugar a la misma ecuación que la variación de, solamente, S_M . La variación de S con respecto a g^{ab} da lugar a la ecuación

$$G_{ab} = R_{ab} + \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.44)$$

donde el tensor T_{ab} se define como

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (2.45)$$

La acción de la materia S_M debe ser invariante bajo difeomorfismos, i.e., si $f : M \rightarrow M$ es una familia de difeomorfismos de un parámetro, tenemos $S_M [g^{ab}, \psi] = S_M [f_\lambda^* g^{ab}, f_\lambda^* \psi]$, donde $f_\lambda^* : V_p \rightarrow V_p$.

De hecho, para dichas variaciones, tenemos

$$0 = \frac{dS_M}{d\lambda} = \int \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \int \frac{\delta S_M}{\delta \psi} \delta \psi, \quad (2.46)$$

Para tales variaciones, δg^{ab} tiene la forma general $\delta g^{ab} = \nabla ({}^a w^b)$, donde w^a es un campo vectorial arbitrario. Supongamos que ψ satisface las ecuaciones del campo con masa. Entonces $\delta S_M / \delta \psi \big|_\psi = 0$, así que el segundo término en la ecuación (2.46) no contribuye. Usando la definición (2.45) encontramos que para un campo vectorial arbitrario y suave w^a , tenemos

$$0 = \int \sqrt{-g} T_{ab} \nabla ({}^a w^b) \epsilon = \int T_{ab} \nabla^a w^b \epsilon = - \int (\nabla^a T_{ab}) w^b \epsilon, \quad (2.47)$$

lo que implica que

$$\nabla^a T_{ab} = 0. \quad (2.48)$$

Para una acción invariante frente a difeomorfismos, T_{ab} siempre se conserva en virtud de la ecuación de campo. Esto refuerza la interpretación de T_{ab} , que representa el tensor energía-momento del campo con masa. Notemos que aplicando el argumento anterior a S_G tenemos

$$\nabla^a G_{ab} = 0. \quad (2.49)$$

Entonces, en la formulación lagrangiana de relatividad general, la identidad de Bianchi puede ser vista como consecuencia de la invariancia de la acción de Hilbert-Einstein bajo difeomorfismos.

2.3. Formulación hamiltoniana de las Ecuaciones de Einstein

Una formulación lagrangiana de una teoría de campos es covariante en el espacio-tiempo.¹³ Especificamos en la variedad del espacio-tiempo una acción funcional del campo ψ cuya extremización da lugar a las ecuaciones del campo. El primer paso para la formulación hamiltoniana

¹³Es invariante frente a transformaciones generales de coordenadas.

consiste en escoger una función global de tiempo t y un campo vectorial t^a en un espacio-tiempo tal que las superficies, Σ_t , de t constante, son superficies (espaciales) de Cauchy, tales que $t^a \nabla_a t = 1$. El campo vectorial t^a puede ser interpretado como el “flujo de tiempo” en el espacio-tiempo y puede ser utilizado para identificar cada superficie Σ_t , con la superficie inicial Σ_0 . En el espacio-tiempo de Mikowski la elección de t y t^a usualmente se realiza a través de un sistema de coordenadas inercial, pero en un espacio-tiempo curvo no hay ninguna elección preferencial. En la realización de integrales sobre M sería natural para la mayoría de los propósitos usar el elemento de volumen ϵ_{abcd} asociado con la métrica del espacio-tiempo. Similarmente, en la realización de integrales sobre Σ_t sería natural, en la mayoría de los casos, utilizar el elemento de volumen ${}^{(3)}\epsilon_{abc} = \epsilon_{dabc} n^d$, donde n^d es la normal unitaria a Σ_t . Sin embargo, estos elementos de volumen serán, en general, dependientes del tiempo en el sentido que $\mathcal{L}_t \epsilon_{abcd} \neq 0$ y $\mathcal{L}_t {}^{(3)}\epsilon_{abc} \neq 0$, donde \mathcal{L}_t es la derivada de Lie¹⁴ respecto del tiempo (el subíndice t indica derivada temporal, que no es más que la derivada de Lie en la dirección del flujo temporal t_a). El uso de un elemento de volumen dependiente del tiempo sobre Σ_t no es conveniente en el caso en que deseemos identificar Σ_t con Σ_0 a fin de ver la evolución dinámica como el cambio de los campos sobre la variedad fija Σ_0 . Por lo tanto, introduciremos un elemento de volumen e_{abcd} en M que satisface $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$. Una forma de realizar esto, al menos localmente, es introducir coordenadas x^1, x^2, x^3 en adición a t tal que $t^a = (\partial/\partial t)^a$ y tomar e como la coordenada del elemento de volumen d^4x . Sobre cada Σ_t , definimos ${}^{(3)}e_{abc} = e_{dabc} t^d$. A menos que se indique lo contrario, todas las integrales sobre M serán realizadas utilizando el elemento de volumen e_{abcd} y todas las integrales sobre Σ_t serán con respecto al elemento de volumen ${}^{(3)}e_{abc}$. En particular, con el fin de que nuestros resultados sean independientes de la elección de e_{abcd} , la densidad Lagrangiana debe ser una densidad escalar en M y el momento π (que definiremos a continuación) debe ser una densidad tensorial en Σ_t .

El siguiente paso para la formulación hamiltoniana es definir un espacio de configuración especificando qué campo o campos tensoriales q en Σ_t describen físicamente la configuración instantánea de ψ . El espacio de momentos posible del campo en una configuración dada q es tomada como el “espacio cotangente”, V_q^* , del espacio de configuración en q . Ya que el conjunto de posibles configuraciones del campo tiene dimensión infinita, no intentaremos dar una definición precisa de V_q^* . Sin embargo, en el caso donde las variaciones infinitesimales permitidas (vectores tangentes) δq en q , sean representadas por campos tensoriales en Σ_t de tipo (k, l) tomaremos el espacio de momentos que consisten en campos tensoriales, π , de tipo (k, l) en Σ_t , de modo que las aplicaciones $\pi, \delta q$ en \mathbb{R} a través de $\delta q \rightarrow \int_{\Sigma_t} \pi \delta q$, donde la contracción de los índices es entendida. Entonces, se debe dar una prescripción para asociar un momento π con el campo ψ en Σ_t .

El último paso requerido para la formulación hamiltoniana de la teoría de campos es la especificación de un funcional $H[q, \pi]$ en Σ_t , llamada el *hamiltoniano*, el cual tiene la forma

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}, \quad (2.50)$$

donde la *densidad hamiltoniana* \mathcal{H} es la función local de q, π y de sus derivadas espaciales hasta un orden finito, tal que las ecuaciones

$$\dot{q} \equiv \hbar_t q = \frac{\delta H}{\delta \pi} \quad (2.51)$$

¹⁴La derivada de Lie es una derivación en el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable M , cuya definición puede extenderse al álgebra tensorial de la variedad. Obtenemos entonces lo que en topología diferencial se denomina derivación tensorial: una aplicación \mathbb{R} -lineal sobre el conjunto de tensores de tipo (k, l) , que preserva el tipo tensorial y satisface la regla del producto de Leibniz y que conmuta con las contracciones.

$$\dot{\pi} \equiv \hbar_t \pi = -\frac{\delta H}{\delta q} \quad (2.52)$$

son equivalentes a la ecuación de campo que satisface ψ .

Dada una formulación lagrangiana de una teoría de campos, existe una prescripción estándar para obtener la formulación hamiltoniana análoga al procedimiento utilizado en mecánica de la partícula. Primero, tomamos q simplemente como el campo ψ evaluado en Σ_t . Luego, vemos la densidad lagrangiana como una función de q , sus derivadas temporales, y sus derivadas espaciales. Asumiendo que \mathcal{L} no depende de las derivadas temporales de orden mayor a uno de q , tomamos el momento, π , asociado a ψ en Σ_t como

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (2.53)$$

A continuación, intentaremos resolver la ecuación (2.53) para \dot{q} como función de q y π . Si esto no es posible, definimos

$$\mathcal{H}(q, \pi) = \pi \dot{q} - \mathcal{L}, \quad (2.54)$$

donde $\dot{q} = \dot{q}(q, \pi)$ es entendida en esta ecuación tanto explícitamente como en su aspecto implícito en \mathcal{L} . Con esta elección de \mathcal{H} , las ecuaciones (2.51) y (2.52) son equivalentes a la ecuación (2.27). Para probar esto, definimos

$$J = \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} = -S + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \pi \dot{q}. \quad (2.55)$$

Entonces, para una variación suave de un parámetro de ψ que satisface $\delta\psi = 0$ en $t = t_1$ y $t = t_2$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\lambda} &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[\frac{\delta H}{\delta q} \delta q + \frac{\delta H}{\delta \pi} \delta \pi \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} [\pi \delta \dot{q} + \dot{q} \delta \pi] - \frac{dS}{d\lambda} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} [-\dot{\pi} \delta q + \dot{q} \delta \pi] - \frac{dS}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

donde en la última igualdad realizamos una integración por partes. Comparando el primer y el último término de la ecuación anterior, vemos que $\delta S / \delta \psi = 0$ si y sólo si se satisfacen las ecuaciones (2.51) y (2.52). Entonces, \mathcal{H} es una densidad hamiltoniana para ψ .

Haciendo analogía al procedimiento que se realiza para obtener la formulación hamiltoniana en la teoría de un campo de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Minkowski, y la formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Maxwell en el espacio-tiempo de Minkowski (ver Ref. 1), intentaremos obtener la formulación hamiltoniana de las ecuaciones de Einstein³. Elegimos la función de tiempo t y el campo vectorial “flujo de tiempo” t^a en M que satisface $t^a \nabla_a t = 1$. Notemos que no nos es posible interpretar t y t^a en términos de medidas físicas usando relojes hasta que conozcamos la métrica del espacio-tiempo, la cual es la variable del campo desconocida en las ecuaciones de Einstein. Dada una métrica g_{ab} , es conveniente descomponer t^a en sus partes normal y tangencial con respecto a las superficies, Σ_t , de tiempo t constante. Definimos la *función lapso*, N , como

$$N \equiv -g_{ab}t^a n^b = (n^a \nabla_a t)^{-1} \quad (2.57)$$

y el vector desplazamiento N^a como

$$N^a \equiv h^a_b t^b, \quad (2.58)$$

donde n^a es un vector normal (unitario) a Σ_t y $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ es la métrica espacial inducida en Σ_t . Entonces, N mide la tasa de flujo de tiempo propio, τ , con respecto a la coordenada de tiempo, t , a medida que nos movemos normalmente a Σ_t ; mientras que N^a mide la cantidad de desplazamientos tangenciales a Σ_t contenidos en el campo vectorial de flujo de tiempo t^a (Fig. (2.2)). En términos de N , N^a , y t^a , tenemos

$$n^a = \frac{1}{N} (t^a - N^a), \quad (2.59)$$

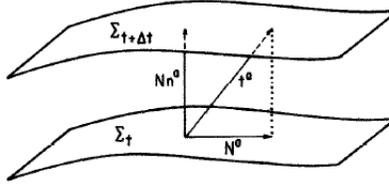


Figura 2.2: Diagrama del espacio-tiempo donde se ilustra la definición de la función Lapso, N , y el vector desplazamiento, N^a .

y por lo tanto, la inversa de la métrica del espacio-tiempo puede ser escrita como

$$g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b = h^{ab} - N^{-2} (t^a - N^a) (t^b - N^b). \quad (2.60)$$

Es conveniente elegir, como nuestras variables de campo la métrica espacial, h_{ab} , la función lapso N , y la forma covariante del vector desplazamiento, $N_a = h_{ab} N^b$ (donde los índices de los vectores espaciales suben y bajan con h_{ab}), en lugar de la inversa de la métrica, g^{ab} . Los requerimientos de que $h^{ac} h_{cb}$ sea el operador identidad en el espacio tangente Σ_t y que $h^{ab} \nabla_b t = 0$, nos permiten calcular h^{ab} a partir de h_{ab} y, de ahí, obtener $N^a = h^{ab} N_b$. Así, de la ecuación (2.60) vemos que la información contenida en (h_{ab}, N, N_a) es equivalente a la contenida en g^{ab} .

Nuevamente, debemos utilizar un elemento de volumen fijo e_{abcd} en el espacio-tiempo que satisfaga $\mathcal{L}_t e_{abcd} = 0$ y usaremos el elemento de volumen ${}^{(3)}\epsilon_{abc} = \sqrt{h} {}^{(3)}e_{abc}$, donde h es el determinante de la matriz de componentes, $h_{\mu\nu}$, de h_{ab} en una base donde las componentes no nulas de ${}^{(3)}e_{abcd}$ toman los valores ± 1 . Entonces, resulta que

$$\sqrt{-g} = N \sqrt{h}. \quad (2.61)$$

El primer paso para obtener el funcional hamiltoniano para relatividad general es expresar la acción gravitacional (2.34) en términos de (h_{ab}, N, N_a) y sus derivadas temporales y espaciales.

Para ello introducimos la curvatura extrínseca, K_{ab} , está relacionada con la derivada temporal de h_{ab} , $\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab}$, de modo que,

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \dot{h}_{ab} = \frac{1}{2} [n^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b n^c + h_{cb} \nabla_a n^c]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}N^{-1} [Nn^c \nabla_c h_{ab} + h_{ac} \nabla_b (Nn^c) + h_{cb} \nabla_a (Nn^c)] \\
&= \frac{1}{2}N^{-1} h_a^c h_b^d [\dot{h}_t h_{ab} + \dot{h}_N h_{cd}] \\
&= \frac{1}{2}N^{-1} [\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a], \tag{2.62}
\end{aligned}$$

donde D_a es el operador derivada en Σ_t asociado con h_{ab} y donde la ecuación (2.59) se utilizó para pasar de la segunda a la tercera línea.

Expresamos la curvatura escalar, R , como

$$R = 2 (G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b). \tag{2.63}$$

Considerando las relaciones de Gauss-Codacci

$$(i) R_{abc}{}^d = h_a^f h_b^g h_c^k h_j^d R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d \tag{2.64}$$

$$(ii) D_a K^a{}_b - D_b K^a{}_a = R_{cd} n^d h^c{}_b \tag{2.65}$$

obtenemos:

$$G_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} \left\{ {}^{(3)}R - K_{ab} K^{ab} + K^2 \right\}, \tag{2.66}$$

donde $K = K^a{}_a$. Por otro lado, de la definición del tensor de Riemann tenemos

$$\begin{aligned}
R_{ab} n^a n^b &= R_{acb}{}^c n^a n^b \\
&= -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\
&= (\nabla_a n^a) (\nabla_c n^c) - (\nabla_c n^a) (\nabla_a n^c) - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^a) \\
&= K^2 - K_{ac} K^{ac} - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c). \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Los últimos dos términos de la derecha de la ecuación (2.67) son divergencias, y deben ser descartadas. Así, de las ecuaciones (2.33), (2.61) y (2.67) obtenemos

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{h} N \left[{}^{(3)}R + K_{ab} K^{ab} - K^2 \right]. \tag{2.68}$$

La sustitución de la ecuación (2.62) en la ecuación (2.68) expresa la acción gravitacional en la forma deseada, dada en la Ref. 12.

El momento canónicamente conjugado de h_{ab} es

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} (K^{ab} - K h^{ab}). \tag{2.69}$$

Sin embargo, \mathcal{L}_G no contiene ninguna derivada temporal de N y N_a , por tanto, su momento conjugado es nulo. En analogía con el caso electromagnético, interpretamos este hecho como

signo de que N y N_a no son vistas como variables dinámicas. Entonces, redefinimos nuestra configuración espacial para que sea consistente con la métrica Riemanniana, h_{ab} en Σ_t . Definimos la densidad hamiltoniana como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_G &= \pi^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= -h^{1/2}N^{(3)}R + Nh^{-1/2}\left[\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}\pi^2\right] + 2\pi^{ab}D_aN_b \\ &= h^{1/2}\left\{N\left[-^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2\right] - 2N^a\left[D_a\left(h^{-1/2}\pi^{ab}\right)\right] + 2D_a\left(h^{-1/2}N_b\pi^{ab}\right)\right\},\end{aligned}\tag{2.70}$$

donde $\pi = \pi^a_a$. Nuevamente, el último término de la ecuación (2.70) contribuye sólo a un término de borde a $H_G = \int \mathcal{H}_G^{(3)}e$ y será descartado. La variación de H_G con respecto a N y N_a da lugar a las ecuaciones

$$-^{(3)}R + h^{-1}\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{2}h^{-1}\pi^2 = 0\tag{2.71}$$

$$D_a\left(h^{-1/2}\pi^{ab}\right) = 0,\tag{2.72}$$

que resultan ser vínculos y, por lo tanto, N y N_a son los multiplicadores de Lagrange correspondientes.

La ecuaciones dinámicas (2.51) y (2.52), obtenidas a partir de H_G son

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ab}} = 2h^{-1/2}N\left(\pi_{ab} - \frac{1}{2}h_{ab}\pi\right) + 2D_{(a}N_{b)}\tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^{ab} &= -\frac{\delta H_G}{\delta h_{ab}} = -Nh^{1/2}\left(^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2}^{(3)}R h^{ab}\right) + \frac{1}{2}Nh^{-1/2}h^{ab}\left(\pi_{cd}\pi^{cd} - \frac{1}{2}\pi^2\right) \\ &\quad - 2Nh^{-1/2}\left(\pi^{ac}\pi_c^b - \frac{1}{2}\pi\pi^{ab}\right) + h^{1/2}\left(D^aD^bN - h^{ab}D^cD_cN\right) \\ &\quad + h^{1/2}D_c\left(h^{-1/2}N^c\pi^{ab}\right) - 2\pi^{c(a}D_cN^{b)},\end{aligned}\tag{2.74}$$

donde despreciamos otra vez los términos de borde, y utilizamos la ecuación (2.72). Las ecuaciones (2.71) y (2.74) son equivalentes a la ecuación de Einstein en el vacío, $R_{ab} = 0$. Por tanto, hemos tenido éxito en realizar una formulación hamiltoniana restringida de las ecuaciones de Einstein.

La presencia de vínculos en nuestra formulación indica que no hemos aislado los grados de libertad dinámicos verdaderos en nuestra elección de la configuración espacial. Aún cuando hemos eliminado N y N_a como variables dinámicas, los vínculos nos dicen que nuestro espacio de fases es demasiado “grande”. Esto está directamente relacionado con la libertad de gauge en nuestras variables de configuración.

En las ecuaciones de Einstein existe la libertad de gauge en la elección de la configuración del campo h_{ab} . Si ψ es un difeomorfismo cualquiera de Σ_t , entonces h_{ab} y ψ^*h_{ab} representa la misma configuración física. Esto sugiere que debemos tomar el espacio de configuración de

relatividad general como las clases de equivalencia, \tilde{h}_{ab} , de la métrica Riemanniana sobre Σ_t , donde dos métricas son consideradas equivalentes si puede ser llevada una en la otra mediante un difeomorfismo. Este espacio de configuraciones es conocido como *superespacio*³. Utilizando el superespacio como el espacio de configuraciones, tenemos que para cada campo vectorial w^a en Σ_t el momento conjugado π^{ab} debe satisfacer

$$\int \pi^{ab} (\delta h_{ab} + D_{(a} w_{b)}) = \int \pi^{ab} \delta h_{ab}, \quad (2.75)$$

lo que implica que π^{ab} satisface automáticamente

$$D_a (h^{-1/2} \pi^{ab}) = 0. \quad (2.76)$$

De esta forma, el vínculo (2.72) puede ser eliminado por la elección del superespacio como espacio de configuraciones.

Sin embargo, el vínculo (2.71) permanece. Ésto puede verse como consecuencia de la libertad de gauge involucrada en la elección de pasar del espacio-tiempo a espacio y tiempo. Esto es análogo al vínculo que surge al parametrizar una teoría libre de vínculos en un espacio-tiempo fijo, es decir, cuando introducimos al Lagrangiano una función tiempo (que define la elección de la hipersuperficies, Σ_t , con respecto a la superficie de referencia Σ) y tratamos esta función tiempo como una variable dinámica¹⁴. En el caso de este tipo de teorías parametrizadas, el vínculo análogo a (2.71) es lineal en el momento conjugado a la función tiempo. Es posible “desparametrizar” la teoría resolviendo el vínculo para el momento. Sin embargo, en el caso de las ecuaciones de Einstein, el vínculo (2.71) es cuadrático en el momento, y una “desparametrización” similar aparentemente no es posible. Entonces, no es probable encontrar un espacio de configuraciones para relatividad general tal que, solamente los grados de libertad dinámicos estén presentes en el espacio de fases. La permanencia del vínculo (2.71) parece ser una característica inevitable de la formulación hamiltoniana de la relatividad general.

Nuevamente despreciamos los términos de borde ya que nuestra variedad no posee uno.

Capítulo 3

Modelo cosmológico homogéneo e isótropo

Recordemos que según lo mencionado en las secciones previas, el espacio-tiempo es una variedad cuatri-dimensional en la que está definida la métrica, g_{ab} . Ésta está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo mediante la ecuación de Einstein, $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$. Dicho esto, nos preguntamos ¿cuál de las soluciones de la ecuación de Einstein describe el espacio-tiempo observado?, es decir, ¿cuál es la que corresponde a nuestro Universo? Para comenzar a buscar una respuesta a estas cuestiones debemos introducir, en principio, datos observacionales, además de suposiciones acerca de la naturaleza del Universo observado. A partir de esta información intentaremos resolver las ecuaciones de Einstein, para así poder predecir la evolución dinámica del Universo.

Proseguiremos investigando la estructura del Universo predicha por la relatividad general, bajo el supuesto de ser homogéneo e isótropo.

3.1. Homogeneidad e isotropía

Mientras que nuestros telescopios pueden observar objetos muy lejanos a escala humana, debemos reconocer que, en términos cósmicos, nos reportan información de apenas una parte de nuestro cono de luz pasado. Por tanto, una buena parte de nuestros aportes en cosmología se trata de prejuicios filosóficos. Las observaciones pueden llegar a confirmar estos prejuicios, pero en general no se puede esperar la prueba definitiva de que son correctas.

Desde los tiempos de Copérnico, se ha asumido que no ocupamos un lugar privilegiado en el Universo, en tanto que si estuviéramos situados en una región diferente, las características básicas de nuestros alrededores serían aparentemente las mismas. Similarmente, es natural asumir la isotropía del Universo, es decir, que no existen direcciones preferenciales en el espacio, lo que es confirmado por las observaciones realizadas a una escala lo suficientemente grande. Aunque las observaciones de la distribución de galaxias en nuestro Universo muestran cúmulos de galaxias en un amplio rango de escalas de distancia y algunas observaciones recientes muestran grandes regiones de vacío en ciertas regiones¹⁵, a grandes escalas la distribución de galaxias parece ser homogénea e isótropa.

Pruebas de radiofuentes y la isotropía de los rayos X y Gamma en la radiación cósmica de fondo respalda la hipótesis de homogeneidad e isotropía a gran escala en nuestro Universo.

Es necesario realizar una formulación matemática acerca de esta hipótesis de homogeneidad e isotropía (la cual asumiremos de aquí en adelante). Una ligera definición del concepto de ho-

homogeneidad es que, dado un instante de tiempo, cada punto del espacio debe ser “prácticamente igual” al resto de los puntos. Una definición formal sería: el espacio-tiempo es homogéneo (espacialmente) si existe una familia de superficies de un parámetro Σ_t que “llena” el espacio-tiempo (Fig. (3.1)) tal que para cada t y para dos puntos cualesquiera $p, q \in \Sigma_t$ existe una isometría del espacio métrico, g_{ab} , que lleva p en q .

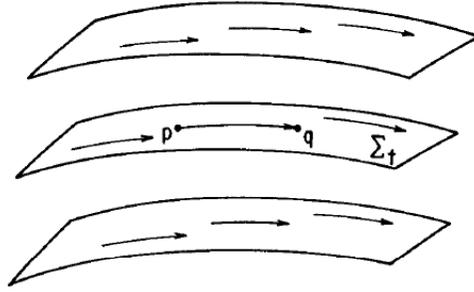


Figura 3.1: Hipersuperficies de homogeneidad espacial en el espacio-tiempo.

Con respecto a la isotropía, debemos tener en cuenta que, en general, en cada punto, al menos un observador puede ver un Universo isótropo. Por ejemplo, si la materia ordinaria llena el Universo, cualquier observador en movimiento relativo con ella, ve un Universo isótropo. A partir de este hecho podemos dar una formulación precisa del concepto de isotropía de la siguiente forma: el espacio-tiempo es isótropo (espacialmente) en cada punto, si existe una congruencia¹ de curvas de tiempo (observadores), con tangentes u^a , “llenando” el espacio-tiempo (Fig. (3.2)) y satisfacen la siguiente propiedad: Dado un punto cualquiera p y dos vectores espaciales unitarios tangentes $s_1^a, s_2^a \in V_p$ (vectores ortogonales a u^a en p), existe una isometría de g_{ab} que deja fijos a p y a u^a en p , pero rota s_1^a en s_2^a . Entonces, en un Universo isótropo es imposible construir geoméricamente un vector tangente preferente, ortogonal a u^a .

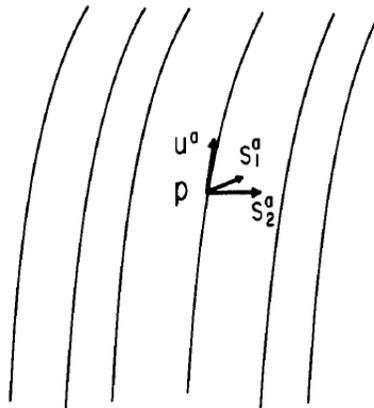


Figura 3.2: Línea de mundo de observadores isótopos en el espacio-tiempo.

¹si existe una isometría que las relaciona

Es fácil ver que en el caso de un espacio-tiempo homogéneo e isótropo, las superficies Σ_t de homogeneidad deben ser ortogonales a las tangentes, u^a , a las líneas de mundo de los observadores isótropos. Si no es así entonces, asumiendo que los observadores isótropos y la familia de superficies homogéneas Σ_t son únicas, el hecho de que el subespacio tangente ortogonal a u^a no coincida con el espacio tangente de Σ_t , nos permite construir geoméricamente un vector espacial preferente.

La métrica del espacio-tiempo, g_{ab} , induce una métrica Riemanniana, $h_{ab}(t)$, y que en cada Σ_t coincide con la restricción de g_{ab} en cada punto $p \in \Sigma_t$. La geometría espacial inducida de las superficies Σ_t está restringida por los siguientes requerimientos: (i) A causa de homogeneidad, debe haber isometrías de h_{ab} que lleven cualquier punto $p \in \Sigma_t$ en cualquier punto $q \in \Sigma_t$. (ii) A causa de la isotropía, es imposible construir geoméricamente vectores preferentes en Σ_t .

En el caso de un Universo homogéneo e isótropo, se puede demostrar que

$${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = K\delta^c_{[a}\delta^d_{b]}.$$
 (3.1)

Entonces, bajando los índices, tenemos

$${}^{(3)}R_{abcd} = Kh_{c[a}h_{b]d}.$$
 (3.2)

El requerimiento de homogeneidad (i) implica que K debe ser constante, es decir, no puede variar de punto a punto de Σ_t . De hecho, es interesante resaltar el hecho de que el requerimiento (ii) también implica que K es constante.

Un espacio donde se satisface la ecuación (3.2) (con K constante) es llamado *espacio de curvatura constante*. Puede demostrarse¹⁶ que dos espacios cualesquiera de curvatura constante de igual dimensión y métrica, y mismos valores de K , deben ser localmente isométricos. Entonces, nuestra tarea de determinar las posibles geometrías espaciales de Σ_t se completará al enumerar los espacios de curvatura constante que abarcan todos los valores de K . Esto puede realizarse fácilmente. Todos los valores de K se obtienen por las tres-esferas, definidas como las superficies en el espacio Euclideo plano cuatri-dimensional, \mathbb{R}^4 , cuyas coordenadas cartesianas satisfacen

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \mathbb{R}^2.$$
 (3.3)

En coordenadas esféricas, la métrica de la tres-esfera unitaria es

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$
 (3.4)

El valor $K = 0$ es obtenido por el espacio plano tri-dimensional ordinario. En coordenadas cartesianas, la métrica es

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$
 (3.5)

En coordenadas hiperbólicas, la métrica de el hiperboloide unitario es

$$ds^2 = d\psi^2 + \sinh^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$
 (3.6)

Aún bajo las estrictas asunciones de homogeneidad e isotropía, el marco de la relatividad general admite varias posibilidades en cuanto a la estructura espacial.

Los Universos que presentan una variedad compacta (por ejemplo, una tres-esfera) como estructura, son llamados “cerrados” y no tienen borde. En tanto, los Universos que presentan estructuras espaciales no compactas (tales como hiperboloides) son llamados “abierto”. De aquí nace una de las cuestiones más intrigantes de la relatividad general, ¿es nuestro Universo cerrado o abierto?

Ya que la familia de observadores que hemos elegido tienen un vector u^a ortogonal a las superficies homogéneas, podemos expresar la métrica cuatri-dimensional del espacio-tiempo, g_{ab} , como

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}(t), \quad (3.7)$$

donde para cada t , $h_{ab}(t)$ es proporcional a la métrica de, ya sea, (a) una esfera, (b) un espacio Euclideo plano, o (c) un hiperboloide, en Σ_t . Elegimos, por conveniencia, como coordenadas correspondientes (a) esféricas, (b) cartesianas, o (c) hiperbólicas, respectivamente, en una de las hipersuperficies homogéneas. Asignamos un sistema de coordenadas fijo a cada observador y finalmente marcamos cada hipersuperficie según el tiempo propio, τ , de un reloj “sostenido” por cada uno de los observadores (por homogeneidad, todos los observadores deben medir la misma diferencia de tiempo entre dos superficies).

Expresada en estas coordenadas, la métrica del espacio-tiempo toma la forma

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \{d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\},$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \{dx^2 + dy^2 + dz^2\},$$

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \{d\psi^2 + \sinh^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\}. \quad (3.8)$$

La forma general de la ecuación (3.8) es llamada modelo cosmológico de *Friedmann - Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)*.⁸

3.2. Dinámica de un Universo homogéneo e isótropo

Nuestro próximo objetivo es sustituir la métrica del espacio-tiempo (3.8) en la ecuación de Einstein (2.19) para obtener las predicciones de la evolución dinámica del Universo. El primer paso es describir el contenido de materia del Universo en términos del tensor momento-energía, T_{ab} , que aparece en el lado derecho de la ecuación de Einstein. En escalas cósmicas, con las que estamos trabajando, cada galaxia puede idealizarse como un “grano de polvo”. Las velocidades aleatorias de las galaxias son pequeñas, por tanto, la presión de este “polvo de galaxias” es despreciable. En buena aproximación, el tensor momento-energía de la materia en el presente Universo toma la forma

$$T_{ab} = \rho u_a u_b, \quad (3.9)$$

donde ρ es la densidad promedio de materia. Sin embargo, existen también otras formas de materia y energía en el Universo. Ya mencionamos la existencia de una radiación térmica a 3°K ; ésta puede ser descrita por el tensor energía-momento correspondiente a un fluido perfecto, pero su presión no es cero, de hecho es $P = \rho/3$. En el Universo actual, la contribución de la radiación térmica en el tensor T_{ab} es despreciable, pero como veremos más adelante, su contribución en el Universo temprano es dominante. Entonces, en el tratamiento de la ecuación de Einstein, tomaríamos T_{ab} de forma general como el correspondiente a un fluido perfecto

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b). \quad (3.10)$$

Siguiendo con nuestro estudio sobre la dinámica, debemos calcular G_{ab} a partir de la métrica (3.8) e igualarla a $8\pi T_{ab}$, ecuación (3.10). A priori, obtendremos diez ecuaciones correspondientes

a diez componentes independientes de un tensor simétrico de dos índices. Teniendo en cuenta las simetrías del espacio-tiempo, en este caso, tendremos sólo dos ecuaciones independientes. Las componentes independientes de la ecuación de Einstein son simplemente

$$G_{ab}u^a u^b = 8\pi\rho \quad (3.11)$$

$$G_{ab}s^a s^b = 8\pi P, \quad (3.12)$$

donde s^a es un vector unitario arbitrario tangente a las hipersuperficies homogéneas.

Ahora, debemos calcular $G_{ab}u^a u^b$ y $G_{ab}s^a s^b$ en términos de $a(\tau)$. Debemos hacer esto explícitamente para el caso de geometría espacial plana,

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \{dx^2 + dy^2 + dz^2\}. \quad (3.13)$$

Las componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma^\tau_{xx} = \Gamma^\tau_{yy} = \Gamma^\tau_{zz} = a\dot{a} \quad (3.14)$$

$$\Gamma^x_{x\tau} = \Gamma^y_{y\tau} = \Gamma^z_{z\tau} = \Gamma^z_{\tau z} = \Gamma^x_{\tau x} = \dot{a}/a, \quad (3.15)$$

donde $\dot{a} = da/d\tau$. Entonces, las componentes independientes del tensor de Riemann se calculan:

$$R_{ab}u^a u^b = -3\ddot{a}/a \quad (3.16)$$

$$R_{ab}s^a s^b = a^{-2}R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}. \quad (3.17)$$

Ya que tenemos

$$R = -R_{ab}u^a u^b + 3G_{ab}s^a s^b = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad (3.18)$$

podemos calcular las componentes independientes del tensor de Einstein

$$G_{ab}u^a u^b = R_{ab}u^a u^b + \frac{1}{2}R = 3\dot{a}^2/a^2 = 8\pi\rho \quad (3.19)$$

$$G_{ab}s^a s^b = R_{ab}s^a s^b - \frac{1}{2}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi P. \quad (3.20)$$

Combinando ambas, obtenemos

$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + 3P). \quad (3.21)$$

Repetiendo el cálculo para los casos de geometrías esféricas e hiperboloides, obtenemos la evolución general para una cosmología homogénea e isotrópica.

$$3\dot{a}^2/a^2 = 8\pi\rho - 3k/a^2 \quad (3.22)$$

$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + 3P), \quad (3.23)$$

donde $k = +1$ para la tres-esfera, $k = 0$ para el espacio plano, y $k = -1$ para el hiperboloide.

Veamos que el Universo no puede ser estático, por lo tanto se debe cumplir $\rho > 0$ y $P \geq 0$. Sustituyendo estas desigualdades en la ecuación (3.23) tenemos que $\ddot{a} < 0$ (con una posible

excepción en el instante de tiempo cuando pasamos de la expansión a la contracción). La naturaleza de esta expansión o contracción nos dice que la escala de distancias entre los observadores isotrópicos (en particular, entre las galaxias) cambia a través del tiempo, pero no existe un centro de expansión o contracción. Por lo tanto, si la distancia entre dos observadores isotrópicos en el tiempo τ es R , la tasa de cambio de R es

$$v \equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{a} \frac{da}{d\tau} = HR, \quad (3.24)$$

donde $H(\tau) = \dot{a}/a$ es llamada *parámetro de Hubble* y la ecuación (3.24) es conocida como *ley de Hubble*. Nótese que v puede ser mayor que la luz, si R es lo suficientemente grande. Esto no contradice el postulado fundamental de relatividad especial y general, ya que este refiere a la velocidad relativa entre dos objetos medida en el mismo evento del espacio-tiempo, no una velocidad definida entre dos objetos distantes.

La expansión del Universo según la ecuación (3.24) ha sido confirmada por el corrimiento al rojo de galaxias distantes, como veremos en la próxima sección.

Dado un Universo en expansión, $\dot{a} > 0$, sabemos de la ecuación (3.23) que $\ddot{a} < 0$, por tanto, el Universo debió expandirse cada vez más rápido si vamos hacia atrás en el tiempo. Si el Universo se hubiera expandido siempre a la misma tasa, entonces en un tiempo pasado $T = a/\dot{a} = H^{-1}$, tendríamos $a = 0$. Bajo la asunción de homogeneidad e isotropía, la relatividad general predice que, en un tiempo menor a H^{-1} el Universo consistía en una singularidad, es decir, la distancia entre todos los puntos del espacio era nula; la densidad de materia y la curvatura del espacio-tiempo era infinita. Este estado del Universo como una singularidad es conocido como *singularidad del Big Bang*¹.

Dado que la estructura del espacio-tiempo es singular en el Big Bang, no tiene sentido físico, ni matemático, cuestionarse sobre el estado del Universo antes del Big Bang; no existe forma alguna de extender la variedad y la métrica del espacio-tiempo más allá del Big Bang, dentro del contexto de la relatividad general.

Luego de haber discutido las predicciones cualitativas de la relatividad general para la evolución del Universo, es útil obtener la ecuación para la evolución de la densidad de masa. Multiplicando la ecuación (3.22) por a^2 , diferenciando con respecto a τ , y eliminando \ddot{a} con la ecuación (3.23), obtenemos

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\dot{a}/a = 0. \quad (3.25)$$

Entonces, para el “polvo de galaxias” con $P = 0$ tenemos

$$\rho a^3 = \text{constante}, \quad (3.26)$$

lo que representa la conservación de la masa en reposo, mientras que para la radiación ($P = \rho/3$) tenemos

$$\rho a^4 = \text{constante}. \quad (3.27)$$

Las ecuaciones (3.26) y (3.27) nos muestran que aunque el contenido de radiación en el presente Universo parece ser despreciable, su contribución a la densidad total de masa en el pasado (cuando $a \rightarrow 0$) debe haber sido dominante sobre la materia ordinaria.

Ahora, podemos analizar las características cualitativas para la evolución futura de nuestro Universo. Si $k = 0, -1$, la ecuación (3.22) nos dice que \dot{a} nunca puede ser cero; por tanto si el Universo se encuentra en expansión en el presente, debe continuar expandiéndose por siempre. Por tanto, para cualquier tipo de materia con $P \geq 0$, ρ debe decrecer con a^{-3} . Entonces $\rho a^2 \rightarrow 0$

cuando $a \rightarrow \infty$. De hecho, si $k = 0$ la velocidad de expansión \dot{a} tiende asintóticamente a cero cuando $\tau \rightarrow \infty$, mientras que si $k = -1$, entonces $\dot{a} \rightarrow 1$ cuando $\tau \rightarrow \infty$.

Sin embargo, si $k = +1$, el Universo no puede expandirse por siempre. El primer término de la ecuación (3.22) decrece con a más rápidamente que el segundo término, y así, dado que el lado derecho debe ser positivo, existe un valor crítico, a_c , tal que $a \leq a_c$. Además, a no puede tender asintóticamente a a_c cuando $\tau \rightarrow \infty$, ya que la magnitud de \ddot{a} está acotada inferiormente por la ecuación (3.23). Entonces, si $k = +1$, luego de un tiempo finito a partir del origen (Big Bang), el Universo alcanzará un tamaño máximo a_c , y comenzará a contraerse nuevamente en lo que conocemos como “*Big Crunch*”, lo que desembocará en el final del Universo.

Concentrémonos ahora en la solución exacta de las ecuaciones (3.22) y (3.23). El procedimiento más eficiente para obtenerla es eliminando ρ usando la ecuación (3.26), o respectivamente, la ecuación (3.27), y sustituirla en la ecuación (3.22). Obtenemos para el polvo

$$\ddot{a}^2 - C/a + k = 0, \quad (3.28)$$

donde $C = 8\pi\rho a^3/3$ es constante; y para la radiación, la ecuación

$$\ddot{a}^2 - C'/a^2 + k = 0, \quad (3.29)$$

donde $C' = 8\pi\rho a^4/3$. Dada la ecuación (3.26), la ecuación (3.23) es redundante, por lo tanto, la ecuación diferencial ordinaria de primer orden (3.28), es todo lo que tenemos que resolver. Las soluciones para $a(\tau)$ pueden ser obtenidas fácilmente por métodos elementales.

Geometría espacial	“Polvo” $P = 0$	Radiación $P = \frac{1}{3}\rho$
tres-esfera, $k = +1$	$a = \frac{1}{2}C(1 - \cos\eta)$	$a = \sqrt{C'} \left[1 - \left(1 - \tau/\sqrt{C'} \right)^2 \right]^{1/2}$
	$\tau = \frac{1}{2}C(1 - \sin\eta)$	
Plano, $k = 0$	$a = (9C/4)^{1/3} \tau^{2/3}$	$a = (4C')^{1/4} \tau^{1/2}$
Hiperboloide, $k = -1$	$a = \frac{1}{2}C(\cosh\eta - 1)$	$a = \sqrt{C'} \left[\left(1 + \tau/\sqrt{C'} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}$
	$\tau = \frac{1}{2}C(\sinh\eta - \eta)$	

Cuadro 3.2: Soluciones del modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

En la Fig.(3.3) vemos las soluciones de $a(\tau)$ en función de τ .

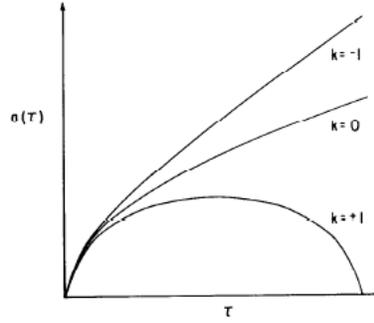


Figura 3.3: Dinámica de un Universo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

3.3. Fenómenos cosmológicos

3.3.1. Corrimiento al rojo

La evidencia más directa de la expansión del Universo viene del corrimiento al rojo espectral en las galaxias distantes. A continuación veremos en qué consiste este fenómeno.

Supongamos que en un evento P_1 a determinado tiempo τ_1 , un observador comóvil emite un fotón con frecuencia ω_1 . Este fotón es observado por otro observador comóvil en un evento P_2 en un tiempo τ_2 como se muestra en la Fig.(3.3). Queremos encontrar la frecuencia, ω_2 , observada por el segundo observador.

En los problemas de corrimiento al rojo en relatividad general, debemos tener en cuenta lo siguiente: (1) En la aproximación de la óptica geométrica, la luz viaja en geodésicas nulas; (2) La frecuencia de una señal de luz cuyo vector de onda es k^a , medida por un observador con cuadri-velocidad u^a es

$$\omega = -k_a u^a. \tag{3.30}$$

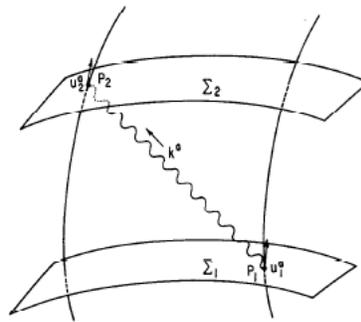


Figura 3.4: Diagrama del espacio-tiempo que muestra la emisión de un haz de luz en el evento P_1 y su recepción en el evento P_2 .

Así, siempre es posible encontrar la frecuencia observada calculando la geodésica nula determinada por el valor inicial de k^a en el punto de emisión y luego hallando el lado derecho de la

ecuación (3.30) en el punto de observación.

Debemos notar que para las tres geometrías posibles podemos hallar un espacio-tiempo con un campo vectorial de Killing² ξ^a con puntos en la dirección de la proyección de k^a en Σ_1 en el punto P_1 y puntos en la dirección de la proyección de k^a en Σ_2 en el punto P_2 . Mediante un desarrollo con estos campos vectoriales de Killing podemos demostrar que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)}. \quad (3.31)$$

Este resultado tiene la simple interpretación de que el Universo está en expansión; la longitud de onda de cada fotón crece en proporción al grado de expansión.

El factor de corrimiento al rojo, z , está dado por

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)} - 1. \quad (3.32)$$

Para la luz emitida por galaxias cercanas, tenemos $\tau_2 - \tau_1 \approx R$, donde R es la distancia propia presente a la galaxia. Por lo tanto, para galaxias cercanas se cumple

$$a(\tau_2) \approx a(\tau_1) + (\tau_2 - \tau_1) \dot{a}, \quad (3.33)$$

entonces tenemos que

$$z \approx \frac{\dot{a}}{a} R = HR \quad (3.34)$$

es la relación lineal entre la distancia y el corrimiento al rojo, descubierta por Hubble. El corrimiento al rojo en galaxias distantes se desviará de esta ley lineal, dependiendo de cuál es la variación de $a(\tau)$ varía con τ .

3.3.2. Horizonte de partículas

Ciertas preguntas surgen del estudio de modelos cosmológicos en relatividad general. En principio, ¿Qué porción del Universo puede ser observado en un evento dado P ? Más precisamente, en el caso particular del modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, nos preguntamos ¿qué observadores comóviles (galaxias) pueden emitir una señal que alcance a un observador isótropo dado en el evento P ? El límite entre las líneas de mundo que pueden verse desde P y aquellas que no, es llamada horizonte de partículas en P . Dado que el Universo se reduce a tamaño cero a medida que nos aproximamos a la singularidad del Big Bang, es de esperar que todos los observadores comóviles puedan comunicarse entre sí, enviándose señales en la historia temprana del Universo, cuando se encontraban muy próximos. Sin embargo, demostraremos que este no es el caso para los modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, que se expanden lo suficientemente rápido a partir de la singularidad inicial (Big Bang).

Para demostrar la existencia de un horizonte de partículas no trivial más vamos a considerar una geometría espacial plana

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.35)$$

Realizando la siguiente transformación de coordenadas (tiempo conforme),

²Un campo vectorial de Killing es un vector definido sobre una variedad de Riemann que define un grupo uniparamétrico de isometrías. En teoría de la relatividad general los vectores de Killing son de gran importancia porque permiten definir tanto leyes de conservación como construir otros invariantes útiles en la resolución de problemas físicos.

$$t = \int \frac{d\tau}{a(\tau)}, \quad (3.36)$$

podemos expresar la métrica (ecuación (3.35)) como

$$ds^2 = a^2(t) (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.37)$$

Ésta es un múltiplo de la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski y se la denomina *conformemente plana*. La relevancia de esta afirmación surge del hecho de que un vector será temporal, nulo, o espacial en la métrica (3.37) si y sólo si tiene la misma propiedad con respecto a la métrica plana

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.38)$$

Por lo tanto, es posible enviar una señal entre dos eventos (unirlos mediante una curva de tiempo o nula) en la métrica (3.37) si y sólo si esto puede hacerse también en la métrica plana (3.38). Entonces, un observador en el evento P será capaz de recibir una señal de todos los demás observadores comóviles si y sólo si la integral (3.36) que define t , diverge a medida que nos aproximamos a la singularidad del Big Bang, $\tau \rightarrow 0$. Si esta integral diverge (caso en que $a(\tau) \leq \alpha\tau$ para cierta constante α mientras $\tau \rightarrow 0$) entonces el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker estará conformemente relacionado al espacio-tiempo de Minkowski (t se extenderá hasta $-\infty$) y no habrá horizonte de partículas. Por otro lado, si la integral converge, el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker estará conformemente relacionado a sólo una porción del espacio-tiempo de Minkowski sobre la superficie de $t = \text{constante}$, y el horizonte de partículas existe como se ilustra en la Fig. (3.5).

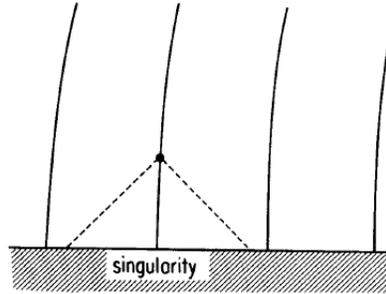


Figura 3.5: La estructura causal de las soluciones de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker cerca de la singularidad del “Big Bang”. El horizonte de partículas existe siempre que un observador no sea capaz de “ver” a todos los demás observadores isótropos en el Universo.

Como vemos en la tabla 5.1, para $k = 0$, aún en el caso del polvo, tenemos $a(\tau) \propto \tau^{2/3}$. Dado que $a(\tau)$ será mayor si $P > 0$, para todas las soluciones de la ecuación de Einstein en el espacio plano Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, la integral (3.36) converge cuando $\tau \rightarrow 0$, y el horizonte de partículas existe.

Para geometrías esféricas e hiperboloides, cuando $\tau \rightarrow 0$ el comportamiento de $a(\tau)$ va al caso plano, dado que el término que involucra k en la ecuación (3.22) pasa a ser despreciable. En el caso de la geometría esférica, la expansión espacial del Universo es finita, y surge la pregunta de si el horizonte de partículas eventualmente deja de existir o continúa presente cuando el Universo recae a la singularidad del “Big Crunch”. La respuesta es que, para el Universo

esférico de polvo (3.2), el horizonte de partículas deja de existir en el momento de máxima expansión, es decir, un haz de luz emitido en el Big Bang viajará a lo largo del Universo durante toda su historia, para que el horizonte de partículas permanezca hasta el “Big Crunch”.

La existencia de horizontes de partículas en los modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker de lugar a una interesante cuestión. Según la radiación cósmica de fondo tenemos buenas razones para creer que el presente Universo es homogéneo e isótropo en un alto grado de precisión. Si hacemos una comparación con, por ejemplo, un gas en un recipiente, si éste está inicialmente en un estado inhomogéneo se volverá homogéneo al cabo de un tiempo, debido a la interacción de las partículas. Esta situación es distinta para el caso del Universo en el que existen horizontes de partículas, ya que porciones lejanas no pueden interactuar entre sí mediante señales de luz. Por esta razón, para explicar la homogeneidad e isotropía observada en el presente Universo, debemos postular que (a) su estado inicial era extremadamente homogéneo e isótropo¹⁷ o, de otra manera, (b) el Universo temprano difiere de los modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, de forma que los horizontes de partículas no existían; por lo que, de algún modo las inhomogeneidades y anisotropías fueron apaciguadas hasta aproximarse a un modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker¹⁸. Ninguna de las dos teorías han sido probadas aún, aunque recientemente se ha sugerido la idea de que el Universo temprano pasó por una “fase inflacionaria” de la cual resulta la gran ampliación del horizonte de partículas en los modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, lo que explicaría como un Universo con un estado inicial caótico pueda evolucionar a uno con gran homogeneidad e isotropía. Será lo que estudiaremos en la sección (3.5).

3.4. La evolución de nuestro Universo

En esta sección haremos una breve descripción de la historia de nuestro Universo desde el Big Bang hasta el presente. Supondremos que esta evolución es bien descrita mediante una solución de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Una forma de entender la naturaleza del Universo temprano es a través del hecho de que el factor de escala a , mientras vamos hacia atrás en el tiempo, tiene el mismo efecto en la materia como si ésta se encontrara en una caja cuyas paredes se contraen a la misma tasa. Por este hecho, la contribución de la radiación comparada con la materia ordinaria (bariones) aumenta hacia el pasado como ya hemos mencionado anteriormente. La densidad de energía de la radiación cósmica de fondo en el presente Universo, se estima que es alrededor de mil veces menor que la contribución de la densidad de masa de la materia ordinaria. Asumiendo que la radiación continúa existiendo hacia el pasado (o sea, que no fue emitida por galaxias), según las ecuaciones (3.26) y (3.27), cuando el factor de escala a era mil veces mayor que su valor actual, la radiación debió ser dominante en la contribución a la densidad de energía del Universo.

Así como en una caja llena de gas que se contrae, la temperatura de este último aumenta a medida que las paredes se comprimen, es de esperar que la materia y la radiación aumenten su temperatura a medida que a decrece, y se vuelvan infinitamente calientes cuando nos aproximamos al Big Bang, $a \rightarrow 0$.

Un problema importante es si las interacciones de materia y radiación en el Universo temprano se dan en una escala de tiempo suficientemente rápida como para ocurrir localmente, es decir, dentro del horizonte de partículas.

La escala de tiempo de expansión del Universo, t_E , el tiempo durante el cual ocurre un cambio significativo en el factor de escala a , es

$$t_E \sim a/\dot{a} = 2\tau. \quad (3.39)$$

Por otro lado, la escala de tiempo de interacciones es

$$t_I \propto a^3/\sigma \propto \tau^{3/2}/\sigma(T), \quad (3.40)$$

donde $\sigma(T)$ es la sección eficaz de las partículas en función de la temperatura, y además, consideramos que se conserva el número de interacciones entre partículas.

Veamos que, a menos que σ caiga muy rápidamente a altas energías, en tiempos tempranos tendremos $t_I \ll t_E$. Por otro lado, mientras el Universo evoluciona, encontraremos que $t_I > t_E$ y la distribución de materia se apartará del equilibrio térmico.

Luego de estas consideraciones, podemos deducir que el Universo comenzó como un "caldo" de materia y radiación caliente ($T \rightarrow \infty$), denso ($\rho \rightarrow \infty$) y en equilibrio térmico. Sin embargo, en la evolución del Universo, el equilibrio térmico no se mantiene ($t_I > t_E$). El contenido de energía en el Universo temprano era dominada por la radiación. En cambio, en el momento en que a alcanzó aproximadamente 1/1000 de su valor actual, la contribución de la materia ordinaria dominó el contenido de energía del Universo, y su dinámica se convirtió en un modelo de Universo de "polvo" de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Durante los primeros 10^{-43} segundos de la evolución del Universo (predicha por la relatividad general clásica), la magnitud de la curvatura del espacio-tiempo era mayor a la escala dada por la longitud de Planck ($G\hbar/c^3$) $\approx 10^{-33}$ cm.

3.5. ¿Por qué Modelos Inflacionarios?

Los modelos inflacionarios (véase Refs. 7, 8 y 9) son importantes porque solucionan de una vez varios de los problemas teóricos del Big Bang. La idea de la inflación explica por qué el Universo es plano (la densidad actual es igual a la densidad crítica), explica la isotropía de la radiación cósmica de fondo (el problema del horizonte de partículas). También reduce casi a cero la sobreproducción de defectos topológicos llevando la mayoría de éstos afuera del Universo observable; dentro del marco inflacionario se pueden generar inhomogeneidades con las características adecuadas para la formación de las estructuras observadas a gran escala hoy en día, en cierto sentido la inflación "borra" las condiciones iniciales especiales que necesita el Big Bang.

Debido a la gran importancia que se le ha dado a este tipo de modelos, debemos dejar en claro un aspecto sumamente importante, el cual muchas veces se olvida por la suposición de que tal idea "debe" ser cierta: la inflación soluciona todos éstos problemas sólo en teoría ya que la misma aún no ha sido comprobada experimentalmente de forma concluyente. Por tanto, en principio, los problemas del Big Bang siguen abiertos.

Aún cuando la Inflación "borra" muchos defectos del Big Bang, no lo resuelve todo. Es relativamente fácil introducir la idea de la inflación "a mano" dentro de un modelo cosmológico (simplemente, se asume que ocurrió sin explicar su origen), y, de hecho, existe desde 1981 una gran cantidad de trabajos teóricos que la utilizan, pero nadie hasta ahora ha podido obtener un modelo satisfactorio a partir de principios físicos más fundamentales.

Capítulo 4

Campo escalar con masa acoplado a gravedad

4.1. Formulación canónica

En este capítulo aplicaremos los conceptos de relatividad general mencionados en la sección anterior, pero ya no consideraremos el caso en el vacío, sino que introduciremos un campo escalar con masa.

A continuación, nos introduciremos en la formulación canónica de relatividad general. Consideraremos una tres-esfera compacta S que divide la variedad M , cuatri-dimensional, en dos partes. En una vecindad de S podemos introducir una coordenada temporal t , tal que S es la superficie en $t = 0$, y coordenadas x^a ($a = 1, 2, 3$). La métrica toma la forma

$$ds^2 = -(N^2 - N_a N^a) dt^2 + 2N_a dx^a dt + h_{ab} dx^a dx^b, \quad (4.1)$$

donde N es la función lapso y N_a el vector desplazamiento, ambos definidos en la formulación hamiltoniana de la sección (2.3). N mide la separación entre las superficies de tiempo constante y N_a mide la desviación de las líneas de x^a constante con respecto a la normal a la superficie S^3 .

La acción es

$$S = \int (L_G + L_m) d^3x dt, \quad (4.2)$$

donde

$$L_G = \frac{1}{16\pi} N (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + h^{1/2} {}^{(3)}R), \quad (4.3)$$

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ab}}{\partial t} + 2N_{(a|b)} \right] \quad (4.4)$$

$$G^{abcd} = \frac{1}{2}h^{1/2} (h^{ac}h^{bd} + h^{ad}h^{bc} - 2h^{ab}h^{cd}). \quad (4.5)$$

Notemos que al sustituir las ecuaciones (4.4) y (4.5) en (4.3), obtenemos la ecuación (2.68), salvo un factor $1/16\pi$ que hemos introducido por conveniencia, y recordando que hemos considerado la constante de gravitación de Newton como $G = 1$.

Al introducir un campo escalar con masa, aparece un nuevo término en el lagrangiano asociado con él:

$$L_m = \frac{1}{2}Nh^{1/2} \left[N^{-2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - 2\frac{N^a}{N^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial x^a} - \left(h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \right) \frac{\partial\phi}{\partial x^a} \frac{\partial\phi}{\partial x^b} - m^2\phi^2 \right]. \quad (4.6)$$

En el tratamiento del hamiltoniano de relatividad general se consideran las componentes h_{ab} como coordenadas canónicas.

Los momentos canónicos conjugados son

$$\pi^{ab} = \frac{\partial L_g}{\partial \dot{h}_{ab}} = -\frac{h^{1/2}}{16\pi} (K^{ab} - h^{ab}K), \quad (4.7)$$

asociado a la coordenada h_{ab} , y

$$\pi_\phi = \frac{\partial L_m}{\partial \dot{\phi}} = N^{-1}h^{1/2} \left(\dot{\phi} - N^a \frac{\partial\phi}{\partial x^a} \right), \quad (4.8)$$

asociado al campo ϕ .

El hamiltoniano de sistema es:

$$H = \int (\pi^{ab}\dot{h}_{ab} + \pi_\phi\dot{\phi} - L_G - L_m)d^3x = \int (NC + N_a H^a)d^3x, \quad (4.9)$$

donde

$$C = 16\pi G_{abcd}\pi^{ab}\pi^{cd} - \frac{1}{16\pi}h^{1/2} {}^{(3)}R + \frac{1}{2}h^{1/2} \left[\frac{\pi_\phi^2}{h} + h^{ab} \frac{\partial\phi}{\partial x^a} \frac{\partial\phi}{\partial x^b} + m^2\phi^2 \right], \quad (4.10)$$

$$H^a = -2D_b\pi^{ab} + h^{ab}D_b\pi_\phi \quad (4.11)$$

Las cantidades N y N_a son consideradas multiplicadores de Lagrange y h_{ab} es la variable dinámica. Así, las soluciones obedecen los vínculos

$$C = 0, \quad (4.12)$$

$$H^a = 0. \quad (4.13)$$

La ecuación (4.12) es un vínculo escalar, mientras que la ecuación (4.13) es un vínculo de difeomorfismo, el cual consiste en tres ecuaciones (una para cada a). En total, tenemos cuatro vínculos.

Si además tenemos en cuenta que h_{ab} es una matriz simétrica de 3×3 , sabemos que tiene seis componentes independientes. Podemos concluir que con seis componentes independientes y cuatro vínculos, tenemos dos grados de libertad para nuestras ecuaciones.

Para una función lapso N y un vector desplazamiento N_i dados en S^3 , las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{h}_{ab} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{ab}}, \quad \dot{\pi}^{ab} = -\frac{\partial H}{\partial h_{ab}}, \quad (4.14)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\phi}, \quad \dot{\pi}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi}. \quad (4.15)$$

4.2. Modelo de Friedmann no perturbado

Como mencionamos en la introducción, vamos a considerar un modelo reducido por homogeneidad e isotropía, con pequeñas inhomogeneidades, representadas por perturbaciones en la métrica de espacio-tiempo⁴. Comenzaremos dando a conocer el modelo de Friedmann no perturbado, para luego introducir las funciones perturbadoras.

Consideremos el modelo de minisuperespacio¹ que consiste en un modelo de Friedmann con una métrica de la forma

$$ds^2 = \sigma^2 (-N_0^2 dt^2 + a^2 d\Omega_3^2), \quad (4.16)$$

donde $d\Omega_3^2$ es la métrica de una tres-esfera de radio unidad. El factor de normalización $\sigma^2 = 2/3\pi$ fue incluido por conveniencia. El modelo contiene un campo escalar $(2^{1/2}\pi\sigma)^{-1}\phi$, de masa $\sigma^{-1}m$, que no varía sobre las superficie de tiempo constante. Esto se puede generalizar para el caso de un campo escalar con potencial $V(\phi)$. Tenemos que la acción es:

$$S = -\frac{1}{2} \int dt N_0 a^3 \left[\frac{1}{N_0^2 a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{N_0^2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + m^2 \phi^2 \right]. \quad (4.17)$$

Variaciones de la acción con respecto a las variables a y ϕ dan lugar a las ecuaciones de movimiento

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{N_0} \frac{d\phi}{dt} \right] + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \frac{d\phi}{dt} + N_0^2 m^2 \phi = 0 \quad (4.18)$$

¹El modelo de minisuperespacio es un modelo reducido por simetrías, con un número finito de grados de libertad.

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{N_0} \frac{da}{dt} \right] = N_0^2 a m^2 \phi^2 - 2a \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \quad (4.19)$$

De manera equivalente podemos hacer una formulación hamiltoniana introduciendo los momentos canónicamente conjugados π_a y π_ϕ a través de las relaciones

$$\pi_a = -\frac{a}{N} \frac{da}{dt}, \quad \pi_\phi = \frac{a^3}{N} \frac{d\phi}{dt}. \quad (4.20)$$

El hamiltoniano resulta ser

$$H_0 = \frac{1}{2} N_0 (-a^{-1} \pi_a^2 + a^{-3} \pi_\phi^2 - a + a^3 m^2 \phi^2). \quad (4.21)$$

Por tanto, variaciones con respecto a N_0 dan lugar al vínculo $H_0 = 0$.

Para determinar las ecuaciones de movimiento debemos utilizar la siguiente propiedad. Para una función f en la variedad M , que depende de las coordenadas canónicas q_i , de sus momentos canónicos π_i y del tiempo, es decir, $f(q_i, \pi_i, t)$, se cumple que el Corchete de Poisson² de f con el hamiltoniano H es igual a la derivada respecto al tiempo de f :

$$\dot{f} = \{f, H\}. \quad (4.22)$$

Aplicando esta propiedad a las funciones del tiempo a , ϕ , π_a , π_ϕ con el hamiltoniano (4.21), obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{a} = [a, H] \implies \dot{a} = -N_0 a^{-1} \pi_a \quad (4.23)$$

$$\dot{\phi} = [\phi, H] \implies \dot{\phi} = N_0 a^{-3} \pi_\phi \quad (4.24)$$

$$\dot{\pi}_a = [\pi_a, H] \implies \dot{\pi}_a = \frac{1}{2} N_0 (a^{-2} \pi_a^2 + 3a^{-4} \pi_\phi^2 - 3a^2 m^2 \phi^2 + 1) \quad (4.25)$$

$$\dot{\pi}_\phi = [\pi_\phi, H] \implies \dot{\pi}_\phi = -N_0 a^3 m^2 \phi. \quad (4.26)$$

Por otro lado, definimos el vínculo C_0 , basado en el vínculo de la ecuación (4.12).

$$C_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi_\phi^2}{a^3} + a^3 m^2 \phi^2 - \frac{\pi_a^2}{a} - a \right). \quad (4.27)$$

En un estudio numérico, es necesario definir las condiciones iniciales de modo que el vínculo se cumpla. Luego debemos verificar que su evolución se mantenga cercana a cero para asegurarnos de que estamos en una buena aproximación a la solución.

²Dadas $f(q_i, \pi_i, t)$, $g(q_i, \pi_i, t)$ entonces el Corchete de Poisson de f con g es: $\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial \pi_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial \pi_i}$.

4.3. Modelo Inflacionario

Hoy en día, la inflación es un marco teórico muy importante que describe el Universo temprano, y explica los datos observacionales en el presente⁷. Ya hemos hablado de la importancia que tienen los modelos inflacionarios sobre las deficiencias del modelo del Hot Big Bang. Es por esto que consideramos un modelo inflacionario en nuestro trabajo.

El sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica del campo escalar y de la geometría cosmológica está dado por la combinación de las ecuaciones (4.23), (4.27), y la elección de $N_0 = 1$ (en unidades de masa de Planck, m_p), para dar lugar a

$$H^2 = 2 \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right), \quad (4.28)$$

donde $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar, que definiremos como

$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2}. \quad (4.29)$$

Se debe aclarar que a la derecha de la ecuación 4.30, aparece un término a^{-2} , el cual es despreciable frente a H^2 durante todo el período de inflación.

Luego, combinando las ecuaciones (4.24) y (4.25) (y manteniendo el valor fijado para N_0), obtenemos la segunda ecuación del sistema

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0, \quad (4.30)$$

donde $V' = \frac{dV}{d\phi}$.

4.3.1. Régimen “*slow-roll*”

El sistema de ecuaciones (4.28)-(4.30) no siempre corresponde a una expansión acelerada, pero sí lo hace en el llamado régimen “*slow-roll*”, cuando la energía potencial del campo escalar domina sobre su energía cinética.

Más específicamente, la aproximación “*slow-roll*” consiste en despreciar la energía cinética del campo escalar, $\dot{\phi}^2$, en la ecuación (4.28), y su aceleración, $\ddot{\phi}$, en la ecuación (4.30). Así, obtenemos el sistema simplificado

$$H^2 \simeq 2V(\phi), \quad (4.31)$$

$$3H\dot{\phi} + V' \simeq 0. \quad (4.32)$$

Veamos en qué régimen es válida esta aproximación. De la ecuación (4.32), tenemos que la velocidad del campo escalar es

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'}{3H} = -\frac{m^2 \phi}{3H}, \quad (4.33)$$

y teniendo en cuenta $\frac{\dot{\phi}^2}{2} \ll V$, llegamos al requerimiento

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{36} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1. \quad (4.34)$$

De la misma manera $\ddot{\phi} \ll V'$ implica

$$\eta \equiv \frac{1}{18} \frac{V''}{V} \ll 1. \quad (4.35)$$

Entonces, la aproximación “*slow-roll*” es válida cuando el potencial satisface las condiciones (4.34) y (4.35).

4.3.2. Número de “*e-folds*”

La inflación debe durar lo suficiente para solventar los problemas del modelo del Hot Big Bang. Para analizar esta cuestión es útil introducir el *número e-folds*³ de antes del fin de la inflación, al cual llamamos M , y definimos como:

$$M = \ln \left(\frac{a_{end}}{a} \right), \quad (4.36)$$

siendo a el valor del factor de escala en un momento dado de durante la inflación y a_{end} el valor del factor de escala justo al final de la misma. Por definición, M decrece durante la fase inflacionaria, siendo cero en el instante final.

En la aproximación “*slow-roll*”, es posible expresar M como una función del campo escalar. Dado que $dM = -d \ln(a) = -H dt = -\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right) d\phi$, y utilizando las ecuaciones (4.33) y (4.31), obtenemos

$$M(\phi) \simeq \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{6V}{V'} d\phi. \quad (4.37)$$

Por tanto, dado un potencial $V(\phi)$ podemos integrar la ecuación (4.37) y obtener M en función de ϕ .

4.3.3. Inflación para nuestro potencial

Consideremos el potencial

$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2}. \quad (4.38)$$

Los parámetros “*slow-roll*” están dados por

$$\varepsilon \equiv \frac{1}{36} \left(\frac{2}{\phi} \right)^2 \ll 1, \quad (4.39)$$

$$\eta \equiv \frac{1}{18} \frac{2}{\phi^2} \ll 1. \quad (4.40)$$

Sustituyendo el potencial (4.38) en las ecuaciones de movimiento del régimen “*slow-roll*”, podemos integrar explícitamente y obtener la ecuación del campo en función del tiempo

$$\phi - \phi_i = -\frac{m}{3} (t - t_i). \quad (4.41)$$

También podemos expresar el factor de escala como una función del campo escalar, simplemente sustituyendo la ecuación anterior en

$$\frac{d \ln(a)}{d\phi} = \frac{H}{\dot{\phi}} = -3\phi. \quad (4.42)$$

³Por *e-folds*, nos referimos al numero de veces que el factor de escala aumenta en un factor e

Entonces,

$$a = a_{end} \exp \left[-\frac{3(\phi^2 - \phi_{end}^2)}{2} \right]. \quad (4.43)$$

En el caso general, el campo escalar al final de la inflación, ϕ_{end} , depende del grado de la ley de potencias que determina el potencial. En nuestro caso ese exponente es 2, por lo tanto,

$$\phi_{end} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4.44)$$

Finalmente, podemos calcular el número de *e-folds* en función de ϕ como

$$M(\phi) \simeq \frac{3}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}. \quad (4.45)$$

4.4. Modelo de Friedmann perturbado

Asumiremos la métrica definida por la ecuación (4.1), a la que multiplicamos su lado derecho por un factor de normalización σ^2 . La tres-métrica h_{ab} tiene la forma

$$h_{ab} = a^2(\Omega_{ab} + \epsilon_{ab}), \quad (4.46)$$

donde Ω_{ab} es la métrica en la tres-esfera de radio unidad y ϵ_{ab} es una perturbación en la métrica que puede ser expandida en armónicos como sigue:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ab} = 2\sqrt{3}\pi \sum_{n,l,m} \left[6^{1/2} a_{nlm} \frac{1}{3} \Omega_{ab} Q_{lm}^n + 6^{1/2} b_{nlm} (P_{ab})_{lm}^n + 2^{1/2} c_{nlm}^o (S_{ab}^o)_{lm}^n + 2^{1/2} c_{nlm}^e (S_{ab}^e)_{lm}^n \right. \\ \left. + 2d_{nlm}^o (G_{ab}^o)_{lm}^n + 2d_{nlm}^e (G_{ab}^e)_{lm}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Los armónicos $Q(x^a)$ son aquellos que permiten expandir cualquier función sobre la tres-esfera en modos. Asimismo, $P_{ab}(x^a)$ está dado por: $P_{ab} = \frac{1}{(n^2-1)} Q_{|ab} + \frac{1}{3} \Omega_{ab} Q$, y su traza es nula, es decir, $P_a^a = 0$. Los armónicos S_{ab} se definen como $S_{ab} = S_{a|b} + S_{b|a}$, siendo S_a los armónicos vectoriales transversos, con $S_a|a = 0$. Finalmente G_{ab} son los armónicos tensoriales, transversos y de traza nula, $G_a^a = G_{ab}|^b = 0$.⁴

En consecuencia, los coeficientes $a_{nlm}, b_{nlm}, c_{nlm}^o, c_{nlm}^e, d_{nlm}^o, d_{nlm}^e$ son funciones dependientes de la coordenada temporal t pero no de las tres coordenadas espaciales x^a . Los modos a_{nlm}, b_{nlm} están asociados a perturbaciones de tipo escalar, c_{nlm}^o, c_{nlm}^e a las vectoriales y, d_{nlm}^o y d_{nlm}^e son los modos de naturaleza puramente tensorial.

La función lapso, el desplazamiento, y el campo escalar $\Phi(x^a, t)$ pueden ser expandidos en armónicos:

$$N = N_0 \left[1 + 2\sqrt{3}\pi 6^{-1/2} \sum_{n,l,m} g_{nlm} Q_{lm}^n \right], \quad (4.48)$$

$$N_a = 2\sqrt{3}\pi e^\alpha \sum_{n,l,m} \left[6^{-1/2} k_{nlm} (P_{ab})_{lm}^n + 2^{1/2} j_{nlm} (S_a)_{lm}^n \right], \quad (4.49)$$

⁴Todos los detalles sobre los armónicos se encuentran en el apéndice A

$$\Phi = \sigma^{-1} \left[\frac{1}{2^{1/2}\pi} \phi(t) + \sum_{n,l,m} f_{nlm} Q_{lm}^n \right]. \quad (4.50)$$

Donde $P_a = \frac{1}{(n^2-1)} Q_{|a}$. De aquí en más, los índices n, l, m, o y e se denotarán simplemente como n . Por tanto, podemos expandir la acción a todos los ordenes en términos de las cantidades a, ϕ, N_0 sólo hasta segundo orden en las perturbaciones $a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, g_n, k_n, j_n$:

$$S = S_0(a, \phi, N_0) + \sum_n S_n, \quad (4.51)$$

donde S_0 es la acción en el modelo no perturbado, ecuación (4.17), y S_n es cuadrático en las perturbaciones (ver Apéndice B).

De ahora en más, nos será útil realizar el cambio de variable $\alpha = \ln(a)$.⁵ Asimismo, podemos definir los momentos conjugados de la manera usual

$$\pi_\alpha = -N_0^{-1} e^{3\alpha} \dot{\alpha} + \text{términos cuadráticos}, \quad (4.52)$$

$$\pi_\phi = N_0^{-1} e^{3\alpha} \dot{\phi} + \text{términos cuadráticos}, \quad (4.53)$$

$$\pi_{a_n} = -N_0^{-1} e^{3\alpha} \left[\dot{a}_n + \dot{\alpha} (a_n - g_n) + \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n \right], \quad (4.54)$$

$$\pi_{b_n} = N_0^{-1} e^{3\alpha} \frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} \left(\dot{b}_n + 4\dot{\alpha} b_n - \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n \right), \quad (4.55)$$

$$\pi_{c_n} = N_0^{-1} e^{3\alpha} (n^2 - 4) (\dot{c}_n + 4\dot{\alpha} c_n - e^{-\alpha} j_n), \quad (4.56)$$

$$\pi_{d_n} = N_0^{-1} e^{3\alpha} (\dot{d}_n + 4\dot{\alpha} d_n), \quad (4.57)$$

$$\pi_{f_n} = N_0^{-1} e^{3\alpha} \left[\dot{f}_n + \dot{\phi} (3a_n - g_n) \right]. \quad (4.58)$$

El hamiltoniano puede ser expresado en términos de los momentos, las variables de configuración y los multiplicadores de Lagrange

$$H = N_0 \left(C_0 + \sum_n H_{|2}^n + \sum_n g_n H_{|1}^n \right) + \sum_n (k_n^S H_{-1}^n + j_n^V H_{-1}^n). \quad (4.59)$$

Los subíndices 0,1,2 en $H_{|}$ y H_{-} denotan el orden de las cantidades en las perturbaciones y S, V y T denotan las partes escalares, vectoriales, y tensoriales del hamiltoniano. Además C_0 es el vínculo hamiltoniano homogéneo y sigue estando dado por

$$C_0 = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} (-\pi_\alpha^2 + \pi_\Phi^2 + e^{6\alpha} m^2 \phi^2 - e^{4\alpha}), \quad (4.60)$$

⁵Realizando las operaciones correspondientes podemos deducir la relación entre π_α y π_a , tal que : $\pi_\alpha = a\pi_a$.

una vez hemos sustituido α y π_α en (4.27). La parte cuadrática en las perturbaciones tiene las siguientes contribuciones

$$\begin{aligned}
{}^S H_{|2}^n &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{2} a_n^2 + \frac{10(n^2-4)}{(n^2-1)} b_n^2 \right] \pi_\alpha^2 + \left[\frac{15}{2} a_n^2 + \frac{6(n^2-4)}{(n^2-1)} b_n^2 \right] \pi_\phi^2 - \pi_{a_n}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n^2-1)}{(n^2-4)} \pi_{b_n}^2 + \pi_{f_n}^2 + 2a_n \pi_{a_n} \pi_\alpha + 8b_n \pi_{b_n} \pi_\alpha - 6a_n \pi_{f_n} \pi_\phi \right. \\
&\quad \left. - e^{4\alpha} \left[\frac{1}{3} \left(n^2 - \frac{5}{2} \right) a_n^2 + \frac{(n^2-7)}{3} \frac{(n^2-4)}{(n^2-1)} b_n^2 + \frac{2}{3} (n^2-4) a_n b_n - (n^2-1) f_n^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{6\alpha} m^2 (f_n^2 + 6a_n f_n \phi) + e^{6\alpha} m^2 \phi^2 \left[\frac{3}{2} a_n^2 - \frac{6(n^2-4)}{(n^2-1)} b_n^2 \right] \right\}, \\
{}^V H_{|2}^n &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left\{ (n^2-4) c_n^2 (10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) + \frac{1}{(n^2-4)} \pi_{c_n}^2 + 8c_n \pi_{c_n} \pi_\alpha \right. \\
&\quad \left. + (n^2-4) c_n^2 (2e^{4\alpha} - 6e^{6\alpha} m^2 \phi^2) \right\}, \tag{4.61}
\end{aligned}$$

$${}^T H_{|2}^n = \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left\{ d_n^2 (10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) + \pi_{d_n}^2 + 8d_n \pi_{d_n} \pi_\alpha + d_n^2 [(n^2+1) e^{4\alpha} - 6e^{6\alpha} m^2 \phi^2] \right\}. \tag{4.62}$$

Los hamiltonianos de primer orden están dado por

$$\begin{aligned}
H_{|1}^n &= \frac{1}{2} e^{-3\alpha} \left\{ -a_n (\pi_\alpha^2 + 3\pi_\phi^2) + 2(\pi_\phi \pi_{f_n} - \pi_\alpha \pi_{a_n}) + m^2 e^{6\alpha} (2f_n \phi + 3a_n \phi^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} e^{4\alpha} \left[(n^2-4) b_n + \left(n^2 + \frac{1}{2} \right) a_n \right] \right\}, \tag{4.63}
\end{aligned}$$

$${}^S H_{-1}^n = \frac{1}{3} e^{-3\alpha} \left[-\pi_{a_n} + \pi_{b_n} + \left[a_n + \frac{4(n^2-4)}{(n^2-1)} b_n \right] \pi_\alpha + 3f_n \pi_\phi \right], \tag{4.64}$$

$${}^V H_{-1}^n = e^{-\alpha} [\pi_{c_n} + 4(n^2-4) c_n \pi_\alpha]. \tag{4.65}$$

4.5. Ondas tensoriales

Dado que nuestro interés se centra en estudiar las ondas gravitacionales (modos puramente tensoriales), consideraremos que las únicas perturbaciones no nulas son d_{nlm}^0 y d_{nlm}^e .

Dado esto, la perturbación de la métrica tomará la forma

$$\epsilon_{ab} = 2\sqrt{3}\pi \sum_{n,l,m} [2d_{nlm}^o (G_{ab}^o)_{lm}^n + 2d_{nlm}^e (G_{ab}^e)_{lm}^n]. \tag{4.66}$$

La función lapso, el desplazamiento, y el campo escalar $\Phi(x^a, t)$ tomarán la forma:

$$N = N_0, \quad (4.67)$$

$$N_a = 0, \quad (4.68)$$

$$\Phi = \sigma^{-1} \left[\frac{1}{2^{1/2}\pi} \phi(t) \right]. \quad (4.69)$$

La acción es

$$S = S_0(a, \phi, N_0) + \sum_n S_n, \quad (4.70)$$

donde S_0 es la acción en el modelo no perturbado, ecuación (4.17), y S_n es cuadrático en las perturbaciones.

Definimos nuevamente los momentos conjugados considerando sólo las partes tensoriales:

$$\pi_\alpha = -N_0^{-1} e^{3\alpha} \dot{\alpha} + \text{términos cuadráticos}, \quad (4.71)$$

$$\pi_\phi = N_0^{-1} e^{3\alpha} \dot{\phi} + \text{términos cuadráticos}, \quad (4.72)$$

$$\pi_{d_n} = N_0^{-1} e^{3\alpha} (\dot{d}_n + 4\dot{\alpha} d_n). \quad (4.73)$$

El hamiltoniano queda expresado como

$$H = N_0 \left(C_0 + \sum_n {}^T H_{|2}^n \right), \quad (4.74)$$

con C_0 dado por (4.60) y ${}^T H_{|2}^n$ por (4.62).

Las ecuaciones de las variables homogéneas siguen siendo (4.23)-(4.26), mientras que las ecuaciones de movimiento para las ondas tensoriales son

$$\begin{aligned} \dot{d}_n = [d_n, {}^T H_{|2}^n] &\implies \dot{d}_n = N_0 e^{-3\alpha} (\pi_{d_n} + 4\pi_\alpha d_n), \\ \dot{\pi}_{d_n} &= [\pi_{d_n}, {}^T H_{|2}^n] \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\implies \dot{\pi}_{d_n} = N_0 e^{-3\alpha} \left[- (10\pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) d_n - 4\pi_\alpha \pi_{d_n} + (6e^{6\alpha} m^2 \phi^2 - (\omega_n^2 + 2)e^{4\alpha}) d_n \right], \quad (4.76)$$

donde definimos la frecuencia de las ondas gravitacionales $\omega_n^2 = n^2 - 1$, siendo n una etiqueta que toma los valores en los números enteros estrictamente positivos.

Deshaciendo el cambio de variable $\alpha = \ln(a)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{d}_n = [d_n, {}^T H_{|2}^n] &\implies \dot{d}_n = N_0 a^{-3} (\pi_{d_n} + 4a \pi_\alpha d_n), \\ \dot{\pi}_{d_n} &= [\pi_{d_n}, {}^T H_{|2}^n] \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\implies \dot{\pi}_{d_n} = N_0 a^{-3} \left[- (10a^2 \pi_\alpha^2 + 6\pi_\phi^2) d_n - 4a \pi_\alpha \pi_{d_n} + (6a^6 m^2 \phi^2 - (\omega_n^2 + 2)a^4) d_n \right]. \quad (4.78)$$

Capítulo 5

Estudio numérico

5.1. Campo escalar sin masa

En este capítulo resolveremos numéricamente las ecuaciones de movimiento para analizar la evolución temporal de a , ϕ , π_a y π_ϕ , así como la de las perturbaciones tensoriales d_n y π_{d_n} , en el caso en que no hay un período de inflación (campo escalar sin masa, $m = 0$). Además, asumiremos que el lapso cumple $N_0 = 1 m_p$, por lo que haremos una elección de tiempo cosmológico. Primero se deben definir las condiciones iniciales. Nosotros comenzamos fijándolas, por ejemplo, para a , ϕ y π_a , y luego definimos las de π_ϕ por medio del vínculo $C_0 = 0$, de modo que éste se satisfaga en el instante inicial. Para que la solución sea válida, el vínculo C_0 (4.27) debe ser aproximadamente cero durante toda la evolución. Luego de varias pruebas, encontramos un conjunto de condiciones iniciales que dan lugar a una expansión seguida de una contracción o “Big Crunch”. De este conjunto vimos que, por ejemplo, las condiciones

$$a_0 = 10m_p, \quad \pi_{a0} = -100m_p, \quad (5.1)$$

$$\phi_0 = 0, \quad \pi_{\phi 0} = -a_0^{3/2} \left\{ -a_0^3 m^2 \phi_0^2 + \left(\frac{\pi_{a0}^2}{a_0} \right) + a_0 \right\}^{1/2} \quad (5.2)$$

van a servirnos de ejemplo para mostrar cualitativamente los resultados alcanzados en nuestro estudio.

Nótese que hemos definido π_{a0} negativo. Esto es debido a que, para simular una expansión, la derivada respecto al tiempo del factor de escala a en el momento inicial (y durante toda la expansión) debe ser positiva. Por lo tanto, la ecuación (4.20) nos restringe a $\pi_{a0} < 0$.

Además, debemos tener en cuenta que la elección que hicimos en un principio $G = c = 1$, además de $\hbar = 1$, determina las unidades de estas cuatro variables en función de la masa de Planck m_p .¹

Finalmente, definimos las condiciones iniciales para las perturbaciones tensoriales d_n y su momento canónicamente conjugado π_{d_n} . Escribimos las ondas tensoriales con forma sinusoidal, y los respectivos momentos en función de la ecuación (4.73). Trabajaremos con un sólo modo, n , dado. Por tanto,

$$d_{n0} = A_n \cos \varphi, \quad (5.3)$$

¹Masa de Planck: $m_p = 2,18 \times 10^{-8} kg$

$$\pi_{d_n 0} = a_0^3 N_0^{-1} (A_n \omega_n \sin \varphi - 4 N_0 a_0^{-2} \pi_{a 0} d_{n 0}), \quad (5.4)$$

donde A_n es la amplitud de las ondas gravitacionales (y que consideramos que varía entre 1×10^{-10} y 1×10^{-5}), ω_n es la frecuencia y φ es la fase. Por ejemplo, consideremos

$$A_n = 1 \times 10^{-8}, \quad \varphi = 0, \quad n = 100 \Rightarrow \omega_n^2 = n^2 - 1. \quad (5.5)$$

El programa que realizamos con el Software Matlab², arrojó los siguientes resultados:

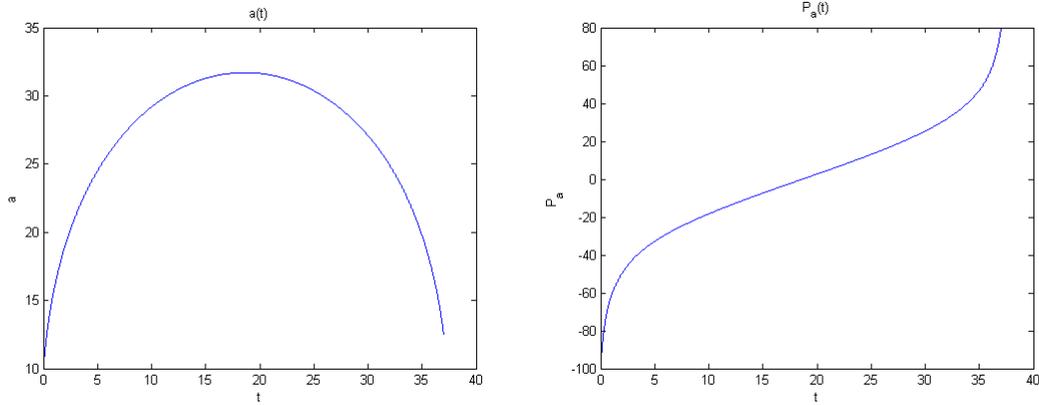


Figura 5.1: Evolución del factor de escala $a(t)$ y su momento canónicamente conjugado $\pi_a(t)$.

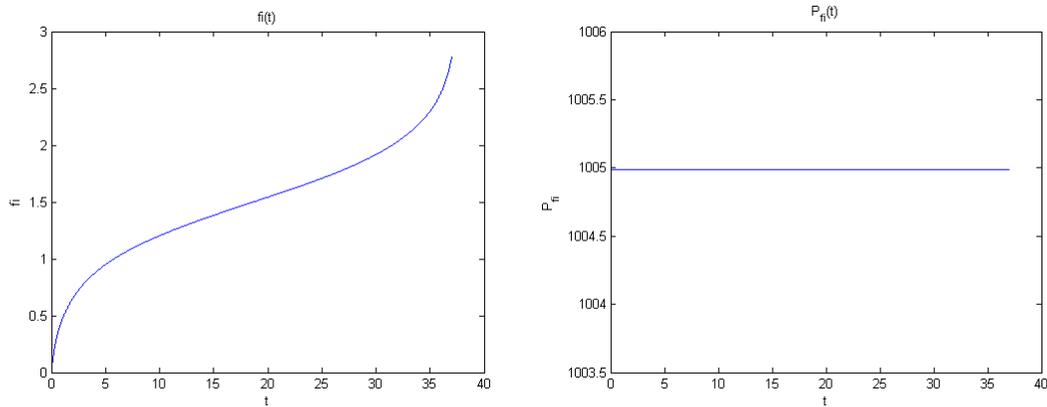


Figura 5.2: Evolución del campo escalar $\phi(t)$ y su momento canónicamente conjugado $\pi_\phi(t)$.

²Para la integración utilizamos la función *ode45* de Matlab, que calcula soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Le propinamos una precisión absoluta de 1×10^{-10} , una precisión relativa de 1×10^{-12} , y definimos el paso temporal al inicio de la integración como 1×10^{-6} .

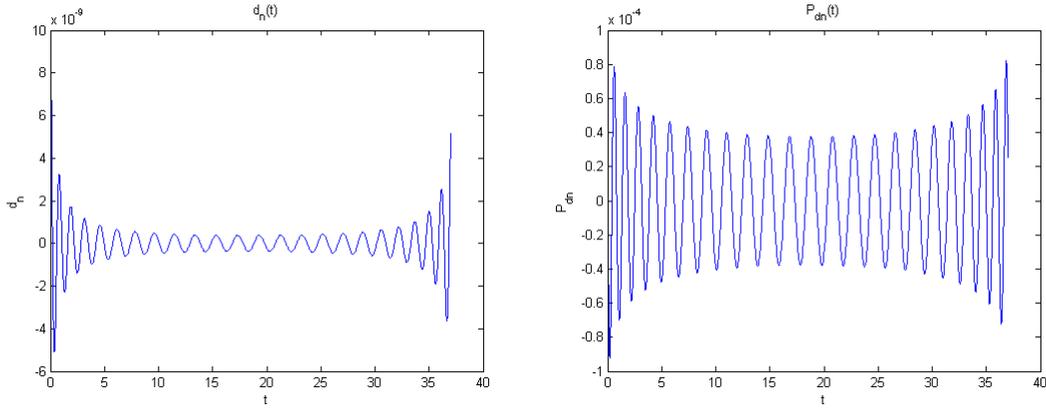


Figura 5.3: Evolución de las ondas gravitacionales $d_n(t)$ y su momento canónicamente conjugado $\pi_{d_n}(t)$.

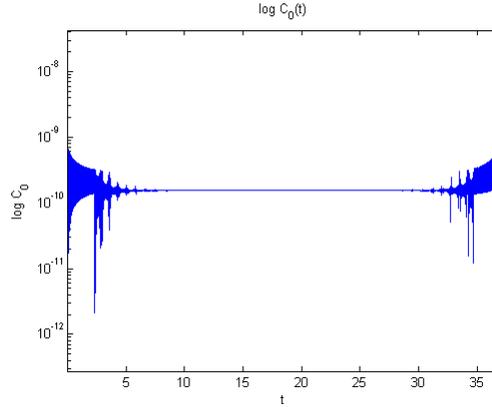


Figura 5.4: Evolución de la ligadura $C_0(t)$, en escala logarítmica.

Podemos apreciar claramente en la Fig.(5.1), la expansión del factor de escala, para que luego de alcanzado cierto máximo, el Universo se contraiga sobre sí mismo. La Fig.(5.2) muestra la invariancia de π_ϕ correspondiéndose con la ecuación (4.26), en el caso en que $m = 0$. En la Fig.(5.3) se muestra la evolución de las ondas gravitacionales y su momento conjugado, con un comportamiento comparable al de un oscilador armónico amortiguado.

Por último, reafirmamos la validez de la solución numérica, por el hecho de que la ligadura C_0 es del orden de 10^{-10} durante toda la evolución (Fig.(5.4)).

5.2. Inflación (Campo escalar con masa)

En esta sección intentaremos resolver numéricamente las ecuaciones de movimiento pero introduciendo un campo escalar con masa, el que dará lugar a un período de inflación. Al igual que antes, realizamos varias pruebas para determinar las condiciones iniciales adecuadas para nuestro propósito, en este caso, analizar el período inflacionario.

$$m = 1 \times 10^{-1} m_p, \quad N_0 = 1 m_p, \quad (5.6)$$

$$a_0 = 10 m_p, \quad \pi_{a0} = -1000 m_p, \quad (5.7)$$

$$\phi_0 = 0,9, \quad \pi_{\phi 0} = -a_0^{3/2} \left\{ -a_0^3 m^2 \phi_0^2 + \left(\frac{\pi_{a0}^2}{a_0} \right) + a_0 \right\}^{1/2}, \quad (5.8)$$

$$d_{n0} = A_n \cos \varphi, \quad \pi_{d_{n0}} = a_0^3 N_0^{-1} (A_n \omega_n \sin \varphi - 4 N_0 a_0^{-2} \pi_{a0} d_{n0}), \quad (5.9)$$

$$A_n = 1 \times 10^{-8}, \quad \varphi = 0, \quad n = 100 \Rightarrow \omega_n^2 = n^2 - 1. \quad (5.10)$$

Bajo estas condiciones, encontramos las siguientes soluciones numéricas:

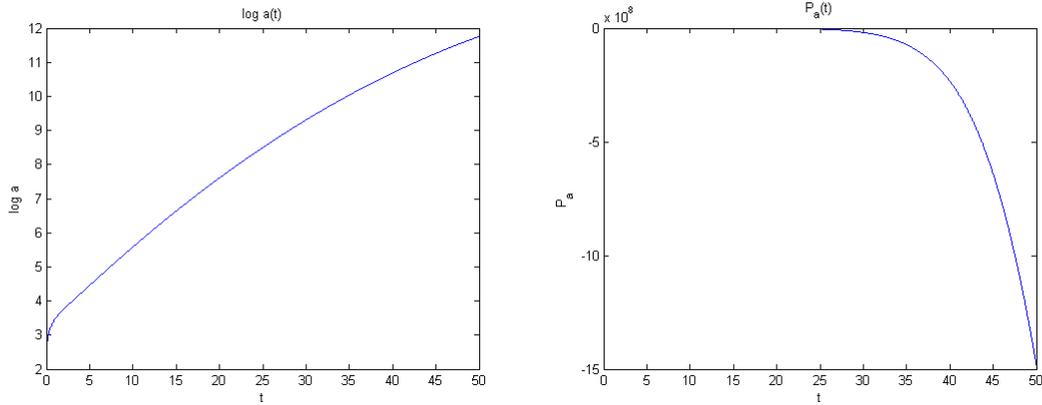


Figura 5.5: Evolución del factor de escala $a(t)$ (en escala logarítmica) y su momento canónicamente conjugado $\pi_a(t)$.

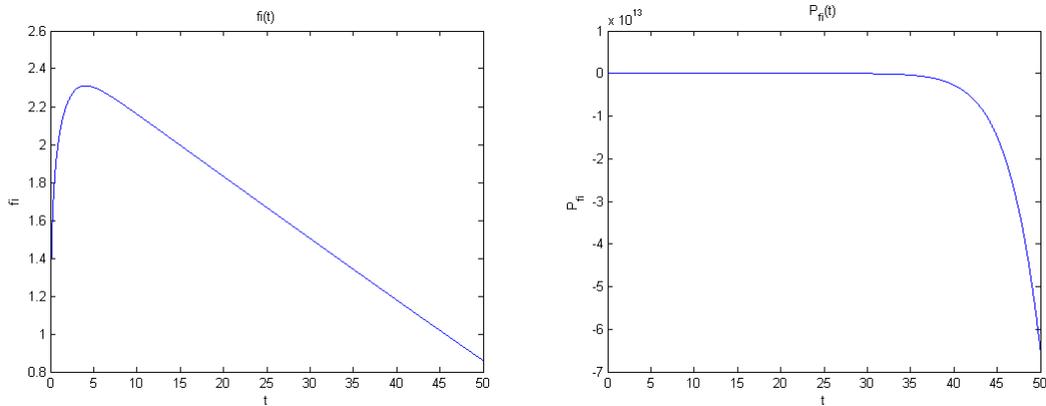


Figura 5.6: Evolución del campo escalar $\phi(t)$ y su momento canónicamente conjugado $\pi_\phi(t)$.

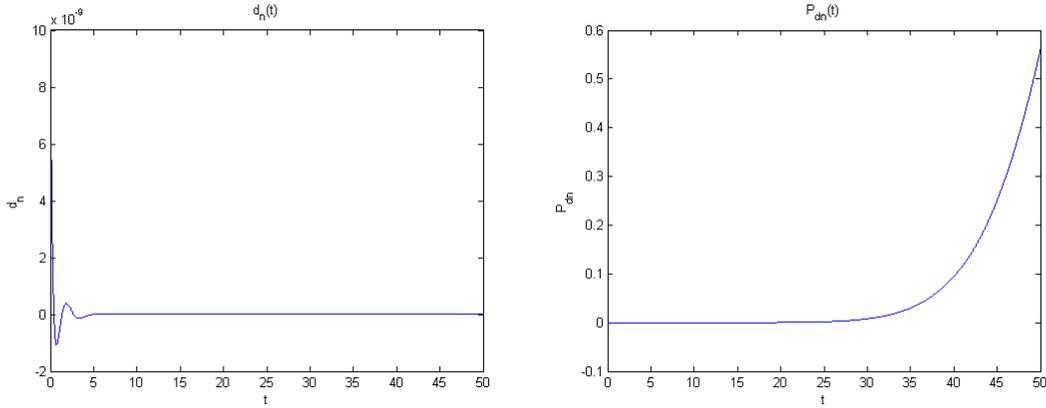


Figura 5.7: Evolución de las ondas gravitacionales $d_n(t)$ y su momento canónicamente conjugado $\pi_{d_n}(t)$.

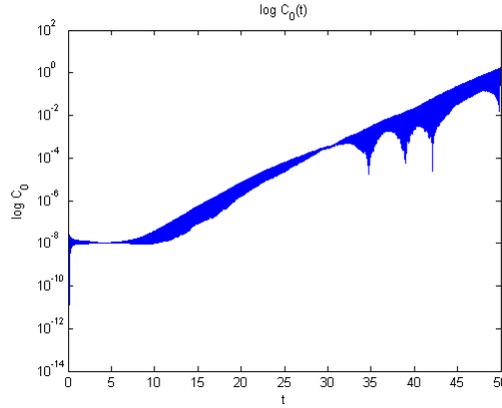


Figura 5.8: Evolución de la ligadura $C_0(t)$, en escala logarítmica.

Se puede apreciar un notorio cambio entre estas figuras y las mismas correspondientes al caso sin masa. En la Fig. (5.6) se grafica la evolución en el tiempo de el campo escalar $\phi(t)$. Se puede apreciar claramente una pendiente positiva correspondiente a un período de pre-inflación, y luego, una pendiente negativa correspondiente al período de inflación.

En la gráfica de la Fig. (5.8), podemos observar que la ligadura se mantiene aproximada a cero durante el período pre-inflacionario, pero no lo hace durante el período inflacionario. Esto significa que nuestra solución numérica no es confiable durante los últimos tramos de la evolución. Afortunadamente, para esta parte de la evolución uno puede adoptar una descripción analítica según lo planteado en la sección (4.3). Para determinar el valor del campo en el instante correspondiente al inicio del período inflacionario realizamos un ajuste lineal, como se muestra en la Fig. (5.9).

De esta forma, determinamos que la inflación comienza en el tiempo $t_i = 6,611$ y el valor del campo escalar en ese instante es $\phi_i = 2,266$. También podemos determinar los valores de las demás variables correspondientes a ese tiempo inicial, entonces: $a_i = 123,6 m_p$, $\pi_{a_i} = -3485 m_p$, $\pi_{\phi_i} = -51550 m_p^2$, $d_{n_i} = 1,701 \times 10^{-11}$, $\pi_{d_{n_i}} = 1,182 \times 10^{-5} m_p^2$.

Cabe aclarar que sólo estamos aproximando los valores iniciales de la inflación, ya que

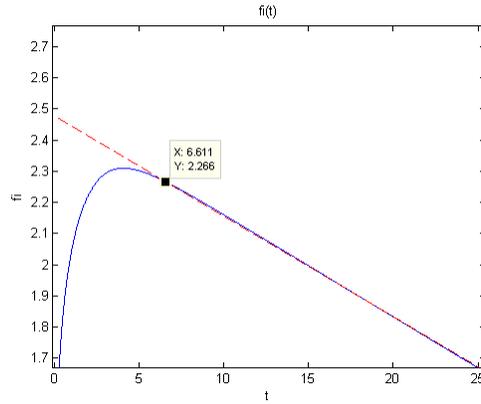


Figura 5.9: La línea discontinua es un ajuste lineal sobre la evolución de $\phi(t)$ en el período inflacionario, con el fin de determinar los valores iniciales.

estamos en el límite de la zona confiable de nuestra solución numérica. Para tiempos posteriores, podemos asegurar que el campo ϕ se comportará linealmente con el tiempo, según la ecuación (4.41).

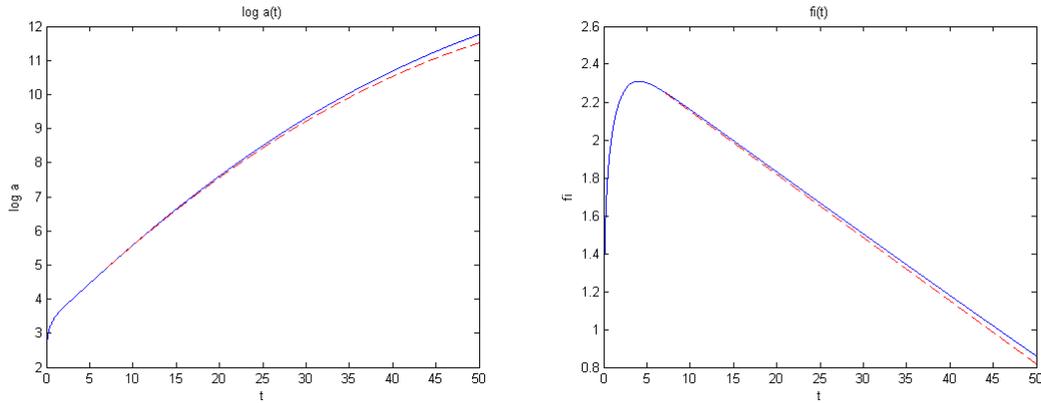


Figura 5.10: La línea continua representa la solución numérica del factor de escala $a(t)$ (graficada en escala logarítmica) y el campo escalar $\phi(t)$. La línea discontinua es la solución analítica correspondiente al período inflacionario.

Sustituyendo los valores iniciales t_i y ϕ_i en la ecuación (4.41), obtenemos la solución analítica para el campo, durante el período de inflación.

$$\phi - 6,611 = -\frac{1 \times 10^{-1}}{3} (t - 2,266) \Rightarrow \phi(t) = -0,033 t + 2,486. \quad (5.11)$$

Además, por la ecuación (4.43) sabemos que la inflación termina cuando el campo toma el valor $\phi_{end} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Para determinar el valor del factor de escala al final de la inflación a_{end} sustituimos los valores iniciales de a_i y ϕ_i como valor genérico en la ecuación (4.44) y despejamos a_{end} :

$$a_{end} = a_i \exp \left[\frac{3 (\phi_i^2 - \phi_{end}^2)}{2} \right] = 1,659 \times 10^5. \quad (5.12)$$

Finalmente, estamos en condiciones de calcular la solución analítica del factor de escala en función del tiempo:

$$a = a_{end} \exp \left[- \frac{3 \left((-0,033 t + 2,486)^2 - (1/\sqrt{3})^2 \right)}{2} \right]. \quad (5.13)$$

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo a futuro

6.1. Conclusiones

- Estudiamos teóricamente un modelo de Universo cerrado, homogéneo e isótropo a gran escala, añadiendo pequeñas perturbaciones para tratar de entender la estructura actual del Universo.
- Dedujimos las ecuaciones de movimiento para un campo escalar con masa.
- Resolvimos numéricamente las ecuaciones de movimiento y encontramos las condiciones iniciales adecuadas (para un campo escalar sin masa) para simular la evolución de un Universo que se expande hasta cierto punto y luego se contrae sobre sí mismo en un “Big Crunch”.
- Logramos reproducir un comportamiento de oscilador armónico amortiguado en las perturbaciones tensoriales consideradas.
- Introduciendo un campo escalar con masa, estudiamos las condiciones inflacionarias del problema. Resolvimos las ecuaciones de movimiento mediante un método numérico para el periodo pre-inflacionario, y analíticamente para el periodo inflacionario, confirmando que el factor de escala a tiene un crecimiento exponencial con el tiempo, y que el campo escalar ϕ tiene un decaimiento lineal con el tiempo.

6.2. Trabajo a futuro

- Resolver las ecuaciones añadiendo las perturbaciones escalares y vectoriales.
- Resolver considerando más modos en las ondas.
- Resolver las ecuaciones para $N = a(t)$.
- Trabajar con los términos cuadráticos en los momentos, para que los efectos gravitacionales se vean reflejados sobre el factor de escala, el campo, y sus momentos canónicos correspondientes.
- Estudiar con más detalle las condiciones inflacionarias.
- Introducir efectos cuánticos.

Capítulo 7

Apéndices

7.1. Apéndice A: Armónicos en la tres-esfera

Ahora describiremos las propiedades de los armónicos escalares, vectoriales, y tensoriales en la tres-esfera S^3 . La métrica de S^3 es Ω_{ab} y, por lo tanto, el elemento de longitud es $dl^2 = \Omega_{ab} dx^a dx^b = d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. Debemos tener en cuenta de la notación que la barra vertical denota la diferenciación con respecto a la métrica, y, los índices a, b, c se elevan o se bajan usando la métrica Ω_{ab} .

7.1.1. Armónicos escalares

Los armónicos esféricos escalares $Q_{lm}^n(\chi, \theta, \phi)$ son funciones propias escalares del operador Laplaciano en S^3 . Por tanto, satisfacen la ecuación de los autovalores

$$Q_{lm}^{(n)}|_c = -(n^2 - 1) Q_{lm}^{(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

La solución más general a la ecuación (7.1), para un n dado, es una sumatoria de soluciones

$$Q^{(n)}(\chi, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l A_{lm}^n Q_{lm}^n(\chi, \theta, \phi), \quad (7.2)$$

donde A_{lm}^n son un conjunto de constantes arbitrarias. Los Q_{lm}^n están dados explícitamente por

$$Q_{lm}^n(\chi, \theta, \phi) = \Pi_l^n(\chi) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (7.3)$$

donde $Y_{lm}(\theta, \phi)$ son los armónicos usuales en la 2-esfera, S^2 , y $\Pi_l^n(\chi)$ son los armónicos de Fock (ver Ref. 10). Los armónicos esféricos Q_{lm}^n constituyen un conjunto ortogonal completo para la expansión de cualquier campo escalar en S^3 .

7.1.2. Armónicos vectoriales

Los armónicos transversos vectoriales $(S)_{lm}^n(\chi, \theta, \phi)$ son funciones propias vectoriales del operador Laplaciano en S^3 . Éstas satisfacen la ecuación de los autovalores

$$S_a^{(n)}|_c = -(n^2 - 2) S_a^{(n)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (7.4)$$

y la condición de transversalidad

$$S_a^{(n)|a} = 0. \quad (7.5)$$

La solución más general a las ecuaciones (7.4) y (7.5), es una sumatoria de soluciones

$$S_a^{(n)}(\chi, \theta, \phi) = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=-l}^l B_{lm}^n (S_a)_{lm}^n(\chi, \theta, \phi), \quad (7.6)$$

donde B_{lm}^n son un conjunto de constantes arbitrarias. Las expresiones explícitas de los $(S_a)_{lm}^n$ están dados por la Ref. 10 donde también se explica como se clasifican en pares (*e*) o impares (*o*) usando una transformación de paridad. Entonces, tenemos dos armónicos vectoriales transversos y linealmente independientes S_a^o y S_a^e (donde se suprimen los índices n, l, m).

Utilizando los armónicos escalares Q_{lm}^n podemos construir un tercer armónico vectorial $(P_a)_{lm}^n$ definido por

$$P_a = \frac{1}{(n^2 - 1)} Q_{|a}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (7.7)$$

donde se han suprimido los índices n, l, m , y satisface

$$P_a|_c|^c = -(n^2 - 3) P_a \quad (7.8)$$

y

$$P_a|_a = -Q. \quad (7.9)$$

Los tres armónicos vectoriales S_a^o , S_a^e y P_a constituyen un conjunto ortogonal completo para la expansión de cualquier campo vectorial en S^3 .

7.1.3. Armónicos tensoriales

Los armónicos tensoriales transversos de traza nula $(G_{ab})_{lm}^n(\chi, \theta, \phi)$ son funciones propias tensoriales del operador Laplaciano en S^3 . Éstas satisfacen la ecuación de los autovalores

$$G_{ab}^{(n)}|_c|^c = -(n^2 - 3) G_{ab}^{(n)}, \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad (7.10)$$

y las condiciones de transversas y traza nula

$$G_{ab}^{(n)|a} = 0, \quad G_a^{(n)a} = 0. \quad (7.11)$$

La solución más general a las ecuaciones (7.10) y (7.11), es una sumatoria de soluciones

$$G_{ab}^{(n)}(\chi, \theta, \phi) = \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=-l}^l C_{lm}^n (G_{ab})_{lm}^n(\chi, \theta, \phi), \quad (7.12)$$

donde C_{lm}^n son un conjunto de constantes arbitrarias. Al igual que en el caso vectorial pueden clasificarse en pares e impares. Las expresiones explícitas para $(G_{ab}^o)_{lm}^n$ y $(G_{ab}^e)_{lm}^n$ están dados por la Ref. 10.

Utilizando los armónicos vectoriales transversos $(S_a^o)_{lm}^n$ y $(S_a^e)_{lm}^n$, podemos construir armónicos tensoriales de traza nula $(S_{ab}^o)_{lm}^n$ y $(S_{ab}^e)_{lm}^n$, ambos definidos por (suprimiendo los índices n, l, m)

$$S_{ab} = S_a|_b + S_b|_a, \quad (7.13)$$

y satisfacen $S_a^a = 0$, ya que S_a es transversa. Además, S_{ab} satisface

$$S_{ab}{}^{|b} = -(n^2 - 4) S_a, \quad (7.14)$$

$$S_{ab}{}^{|ab} = 0, \quad (7.15)$$

$$S_{ab|c}{}^{|c} = -(n^2 - 6) S_{ab}. \quad (7.16)$$

Usando los armónicos escalares Q_{lm}^n podemos construir dos tensores $(Q_{ab})_{lm}^n$ y $(P_{ab})_{lm}^n$ definido por (suprimiendo los índices n, l, m)

$$Q_{ab} = \frac{1}{3} \Omega_{ab} Q, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.17)$$

y

$$P_{ab} = \frac{1}{(n^2 - 1)} Q_{|ab} + \frac{1}{3} \Omega_{ab} Q, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (7.18)$$

Los P_{ab} son de traza nula, $P_a^a = 0$, y además, satisfacen

$$P_{ab}{}^{|b} = -\frac{2}{3} (n^2 - 4) P_a, \quad (7.19)$$

$$P_{ab|c}{}^{|c} = -(n^2 - 7) P_{ab}, \quad (7.20)$$

$$P_{ab}{}^{|ab} = \frac{2}{3} (n^2 - 4) Q. \quad (7.21)$$

Los seis armónicos tensoriales $Q_{ab}, P_{ab}, S_{ab}^o, S_{ab}^e, G_{ab}^o, G_{ab}^e$ constituyen un conjunto ortogonal completo para la expansión de cualquier campo tensorial simétrico de segundo rango en S^3 .

7.1.4. Ortogonalidad y normalización

La normalización de los armónicos escalares, vectoriales y tensoriales está fijada por las relaciones de ortogonalidad. Denotamos la medida de integración en S^3 como $d\mu$. Por tanto,

$$d\mu = d^3x (\det \Omega_{ab})^{1/2} = \sin^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi. \quad (7.22)$$

Los Q_{lm}^n se normalizan de manera que

$$\int d\mu Q_{lm}^n Q_{l'm'}^{n'} = \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (7.23)$$

Esto implica que

$$\int d\mu (P_a)_{lm}^n (P^a)_{l'm'}^{n'} = \frac{1}{(n^2 - 1)} \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (7.24)$$

y

$$\int d\mu (P_{ab})_{lm}^n (P^{ab})_{l'm'}^{n'} = \frac{2(n^2 - 4)}{3(n^2 - 1)} \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (7.25)$$

Los $(S_a)_{lm}^n$, tanto pares como impares, son normalizados de modo que

$$\int d\mu (S_a)_{lm}^n (S^a)_{l'm'}^{n'} = \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (7.26)$$

eso implica

$$\int d\mu (S_{ab})_{lm}^n (S^{ab})_{l'm'}^{n'} = 2 (n^2 - 4) \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (7.27)$$

Finalmente, los $(G_{ab})_{lm}^n$, tanto pares como impares, son normalizados de modo que

$$\int d\mu (G_{ab})_{lm}^n (G^{ab})_{l'm'}^{n'} = \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (7.28)$$

Más detalles sobre los armónicos se pueden encontrar en las Refs. 10 y 19.

7.2. Apéndice B: Acción y ecuaciones del campo

La acción es (ver ecuación (4.51))

$$S = S_0(a, \phi, N_0) + \sum_n S_n. \quad (7.29)$$

donde S_0 es la acción en el modelo no perturbado (ecuación (4.17))

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int dt N_0 e^{3\alpha} \left[\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2} - e^{-2\alpha} - \frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2} + m^2 \phi^2 \right], \quad (7.30)$$

y S_n es cuadrático en las perturbaciones, y puede ser descrito por

$$S_n = \int dt (L_G^n + L_m^n), \quad (7.31)$$

donde

$$\begin{aligned} L_G^n &= \frac{1}{2} e^{\alpha} N_0 \left\{ \frac{1}{3} \left(n^2 - \frac{5}{2} \right) a_n^2 + \frac{(n^2 - 7)(n^2 - 4)}{3(n^2 - 1)} b_n^2 - 2(n^2 - 4) c_n^2 - (n^2 + 1) d_n^2 \right. \\ &+ \frac{2}{3} (n^2 - 4) a_n b_n + g_n \left[\frac{2}{3} (n^2 - 4) b_n + \frac{2}{3} \left(n^2 + \frac{1}{2} \right) a_n \right] + \frac{1}{N_0^2} \left[-\frac{1}{3(n^2 - 1)} k_n^2 + (n^2 - 4) j_n^2 \right] \Big\} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{e^{3\alpha}}{N_0} \left\{ -\dot{a}_n^2 + \frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} \dot{b}_n^2 + (n^2 - 4) \dot{c}_n^2 + \dot{d}_n^2 \right. \\ &+ \dot{\alpha} \left[-2a_n \dot{a}_n + 8 \frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} b_n \dot{b}_n + 8(n^2 - 4) c_n \dot{c}_n + 8d_n \dot{d}_n \right] \\ &+ \dot{\alpha}^2 \left[-\frac{3}{2} a_n^2 + 6 \frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} b_n^2 + 6(n^2 - 4) c_n^2 + 6d_n^2 \right] + g_n [2\dot{\alpha} a_n + \dot{\alpha}^2 (3a_n - g_n)] \\ &\left. + e^{-\alpha} \left[k_n \left[-\frac{2}{3} \dot{a}_n - \frac{2}{3} \frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} \dot{b}_n + \frac{2}{3} \dot{\alpha} g_n \right] - 2(n^2 - 4) \dot{c}_n \dot{j}_n \right] \right\}, \quad (7.32) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
L_m^n = & \frac{1}{2} N_0 e^{3\alpha} \left\{ \frac{1}{N_0^2} \left(\dot{f}_n^2 + 6a_n \dot{f}_n \dot{\phi} \right) - m^2 \left(f_n^2 + 6a_n f_n \phi \right) - e^{-2\alpha} (n^2 - 1) f_n^2 \right. \\
& + \frac{3}{2} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2} - m^2 \phi^2 \right] \left[a_n^2 - \frac{4(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} b_n^2 - 4(n^2 - 4) c_n^2 - 4d_n^2 \right] + \frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2} g_n^2 \\
& \left. - g_n \left[2m^2 f_n \phi + 3m^2 a_n \phi^2 + 2 \frac{\dot{f}_n \dot{\phi}}{N_0^2} + 3 \frac{a_n \dot{\phi}}{N_0^2} \right] - 2 \frac{e^{-\alpha}}{N_0^2} k_n f_n \dot{\phi} \right\}. \quad (7.33)
\end{aligned}$$

Las expresiones completas para π_α y π_ϕ son:

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha = & \frac{e^{3\alpha}}{N_0} \left\{ -\dot{\alpha} + \sum_n \left[-a_n \dot{a}_n + \frac{4(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} b_n \dot{b}_n + 4(n^2 - 4) c_n \dot{c}_n + 4d_n \dot{d}_n \right] \right. \\
& \left. + \dot{\alpha} \sum_n \left[-\frac{3}{2} a_n^2 + \frac{6(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} b_n^2 + 6(n^2 - 4) c_n^2 + 6d_n^2 \right] + \sum_n g_n \left[\dot{a}_n + \dot{\alpha} (3a_n - g_n) + \frac{1}{3} e^{-\alpha} k_n \right] \right\}, \quad (7.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_\phi = & \frac{e^{3\alpha}}{N_0} \left\{ \dot{\phi} + \sum_n \left[3a_n \dot{f}_n + \dot{\phi} \left(\frac{3}{2} a_n^2 - \frac{4(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} b_n^2 + 4(n^2 - 4) c_n^2 + 4d_n^2 \right) \right] \right. \\
& \left. + \dot{\alpha} \sum_n \left[\dot{\phi} g_n^2 - g_n \left(\dot{f}_n + 3a_n \dot{\phi} \right) - e^{-\alpha} k_n f_n \right] \right\}. \quad (7.35)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de campo clásicas pueden ser obtenidas por la acción (7.29) variando con respecto a cada campo. La variación con respecto a α y ϕ da lugar a dos ecuaciones, similares a las obtenidas en el modelo de Friedmann no perturbado, pero modificadas por términos cuadráticos en las perturbaciones:

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{N_0} \frac{d\phi}{dt} \right] + 3 \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\phi}{dt} + N_0^2 m^2 \phi^2 = \text{términos cuadráticos}, \quad (7.36)$$

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{\alpha}}{N_0} \right] + 3\dot{\phi}^2 - N_0^2 e^{-2\alpha} - \frac{3}{2} \left(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 - N_0^2 e^{-2\alpha} + N_0^2 m^2 \phi^2 \right) = \text{términos cuadráticos}. \quad (7.37)$$

La variación con respecto a las perturbaciones a_n, b_n, c_n, d_n, f_n nos lleva a obtener cinco ecuaciones de campo

$$\begin{aligned}
N_0 \frac{d}{dt} \left[e^{3\alpha} \frac{\dot{a}_n}{N_0} \right] + \frac{1}{3} (n^2 - 4) N_0^2 e^\alpha (a_n + b_n) + 3e^{3\alpha} \left(\dot{\phi} \dot{f}_n - N_0^2 m^2 \phi f_n \right) = \\
N_0^2 \left[3e^{3\alpha} m^2 \phi^2 - \frac{1}{3} (n^2 + 2) e^\alpha \right] g_n + e^{3\alpha} \dot{\alpha} \dot{g}_n - \frac{1}{3} N_0 \frac{d}{dt} \left[e^{2\alpha} \frac{k_n}{N_0} \right], \quad (7.38)
\end{aligned}$$

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[e^{3\alpha} \frac{\dot{b}_n}{N_0} \right] - \frac{1}{3} (n^2 - 1) N_0^2 e^\alpha (a_n + b_n) = \frac{1}{3} (n^2 - 1) N_0^2 e^\alpha g_n + \frac{1}{3} N_0 \frac{d}{dt} \left[e^{2\alpha} \frac{k_n}{N_0} \right], \quad (7.39)$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{3\alpha} \frac{\dot{c}_n}{N_0} \right] = \frac{d}{dt} \left[e^{2\alpha} \frac{j_n}{N_0} \right], \quad (7.40)$$

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[e^{3\alpha} \frac{\dot{d}_n}{N_0} \right] - (n^2 - 1) N_0^2 e^\alpha d_n = 0, \quad (7.41)$$

$$N_0 \frac{d}{dt} \left[e^{3\alpha} \frac{\dot{f}_n}{N_0} \right] + 3e^{3\alpha} \dot{\phi} \dot{a}_n + N_0^2 [m^2 e^{3\alpha} + (n^2 - 1) e^\alpha] f_n = e^{3\alpha} \left(-2N_0^2 m^2 \phi g_n + \dot{\phi} g_n - e^{-\alpha} \phi k_n \right). \quad (7.42)$$

Para obtener estas cinco ecuaciones (7.38), (7.39), (7.40), (7.41) y (7.42), hemos utilizado las ecuaciones de campo (7.36) y (7.37), despreciando los términos cúbicos en las perturbaciones.

La variación con respecto a los multiplicadores de Lagrange $k_n, j_n, g_n,$ y N_0 da lugar a un conjunto de vínculos. La variación respecto a k_n y j_n nos lleva a un vínculo en los momentos:

$$\dot{a}_n + \frac{(n^2 - 4)}{(n^2 - 1)} \dot{b}_n + 3f_n \dot{\phi} = \dot{\alpha} g_n - \frac{e^{-\alpha}}{(n^2 - 1)} k_n, \quad (7.43)$$

$$\dot{c}_n = e^{-\alpha} j_n, \quad (7.44)$$

La variación con respecto a g_n nos da un vínculo hamiltoniano lineal:

$$\begin{aligned} 3a_n \left(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \right) + 2 \left(\dot{\phi} \dot{f}_n - \dot{\alpha} \dot{a}_n \right) + N_0^2 m^2 \left(2f_n \phi + 3a_n \phi^2 \right) - \frac{2}{3} N_0^2 e^{-2\alpha} \left[(n^2 - 4) b_n + \left(n^2 + \frac{1}{2} \right) a_n \right] = \\ = \frac{2}{3} \dot{\alpha} e^{-\alpha} k_n + 2g_n \left(-\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 \right). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Finalmente, la variación con respecto a N_0 da lugar al vínculo hamiltoniano, tal que

$$\frac{1}{2} e^{3\alpha} \left(-\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2} - e^{-2\alpha} + m^2 \phi^2 \right) = \text{términos cuadráticos}. \quad (7.46)$$

Agradecimientos

Mi especial agradecimiento a Javier Olmedo quien se animó a orientarme en este trabajo, aún siendo nuevo en el Instituto y en el país, y teniendo que lidiar, en un principio, con mis nulos conocimientos sobre relatividad general.

Con respecto a mi carrera, agradezco principalmente a mi madre y a mi abuela, por apoyarme en todos los aspectos, durante estos cuatro años, y siempre.

También agradezco a Pipi y a Martín, por todas las horas que les robé por quedarme estudiando física, y por aguantarme en los momentos duros de la carrera.

A toda mi familia, por preocuparse, a mis abuelos, mi padre, mis tíos, mis primas, mi hermano...

Por último, agradezco a mis compañeros, por compartir conmigo horas de estudio, trabajo, y algunos asados. También a Tabaré, por orientarme en mis primeros años de trabajo en el Instituto.

Referencias

1. R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984).
2. S. W. Hawking y G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
3. B. S. DeWitt, *Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory*, Phys. Rev. 160, 1113 (1967); J. A. Wheeler, *Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics*, en Batelle Rencontres (Nueva York, 1972), editado por C. M. DeWitt y J. A. Wheeler.
4. J. J. Halliwell y S. W. Hawking, *The Origin of Structure in the Universe*, Phys. Rev. D 31, 1777 (1985).
5. D. Larson et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*, Astrophys. J. Suppl. 192, 16 (2011), arXiv:1001.4635 [astro-ph.CO].
6. Philipp A Höhn, Emília Kubalová, y Artur Tsobanjan, *Effective relational dynamics of a nonintegrable cosmological model*, Phys. Rev. D **86**, 065014 (2012).
7. David Langlois, *Lectures on inflation and cosmological perturbations* Second TRR33 Winter School on Cosmology, (Passo del Tonale, Italy, 2008).
8. A. R. Liddle y D. H. Lyth, *Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
9. V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
10. U. H. Gerlach y U. K. Sengupta, *Homogeneous Collapsing Star: Tensor and Vector Harmonics for Matter and Field Asymmetries*, Phys. Rev. D **18**, 1773 (1978).
11. J. M. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
12. R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research* (Wiley, Nueva York, 1962).
13. R. P. Geroch y P. S. Jang, *Motion of a body in General Relativity*, K. Math. Phys. 19, 1300 (1978).
14. K. Kuchar, *Canonical quantization of gravity*, en Relativity, Astrophysics, and Cosmology. ed. W. Israel (Dordrecht: Reidel, 1973); *Canonical methods of quantization*, en Quantum Gravity 2, ed. C.c.J. Isham, R. Penrose, y D. A. Sciama (Oxford: Clarendon Press).

15. R. P. Kirshner, A. Oemler, P. L. Schechter y S. A. Shectman, *A million cubic megaparsec void in Bootes*, *Astrophys. J.* 248, p. L57-L6 (1981).
16. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton: Princeton University Press, 1949).
17. R. Penrose, *Singularities and time asymmetry*, en *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, ed. S. W. Hawking y W. Israel (Cambridge: Cambridge University Press).
18. C. W. Misner, *Mixmaster Universe*, *Phys. Rev. Lett.* 22, 1071 (1969).
19. E. M. Lifschitz y I. M. Khalatnikov, *Adv. Phys.* 12, 185 (1983).