Trabajo Especial de la Licenciatura en Física opción Astronomía

Relatividad General aplicada a Mecánica Celeste

Federico Benitez

17 de noviembre de 2005

Orientadores: Tabaré Gallardo, Pablo Mora.

Instituto de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Para Lucía,
por este año físico
y por muchos más.

Índice general

1. Introducción **3**

2. Nociones básicas de Relatividad General **6**
- 2.1. La Geometría de Minkowski 6
- 2.2. Geometría riemanniana 8
- 2.3. El Principio de Equivalencia 10
  - 2.3.1. Símbolos de Christoffel 12
  - 2.3.2. Curvatura 13
- 2.4. La ecuación de Einstein 14
- 2.5. El límite newtoniano 15

3. El algoritmo post-newtoniano **17**
- 3.1. Deducción del algoritmo 17
- 3.2. Adaptación al cálculo numérico 32
- 3.3. Comparación con fórmulas utilizadas en la literatura 37

4. Aplicaciones **40**
- 4.1. Precesión del perihelio 40
- 4.2. Algunos órdenes de magnitud 44
- 4.3. Aplicaciones numéricas 46
  - 4.3.1. Evolución a largo plazo del Sistema Solar 46
  - 4.3.2. Cuerpos menores 47
  - 4.3.3. Planetas extrasolares 48
  - 4.3.4. Binarias próximas 48

A. Implementación Fortran **50**

B. Implementación C **53**

Capítulo 1

Introducción

La teoría de la Relatividad General, descubierta principalmente por Albert Einstein hace ya noventa años, corrige y complementa la teoría clásica de Newton de la gravitación universal, quizás su mayor logro. Einstein demoró diez años en encontrar la formulación final de esta teoría, que se basa en su teoría Especial de la Relatividad. En gran parte esa demora se debió a la compleja estructura matemática subyacente, que introduciremos más adelante, en el Capítulo 2.

Existe una leyenda que dice que una vez un periodista le pregunto al famoso astrónomo Sir Arthur Stanley Eddington si era cierto que la Relatividad General era tan difícil que sólo había tres personas en el mundo que la comprendían; a lo cual éste contestó: "¿Cómo, hay un tercero que la comprende?". Después de todo este tiempo podemos quizás tener una razonable esperanza de que las palabras de Eddington fueran sólo una exageración.

Es sabido que de todas las fuerzas conocidas en la naturaleza, la gravitatoria es la más débil, por lo que una teoría de la gravedad es bastante difícil de corroborar experimentalmente, siendo necesario para ello masas muy grandes y por ende, en general, observaciones astronómicas.

Es así que las primeras confirmaciones de la teoría vinieron dadas por las famosa explicación - que sorprendió al propio Einstein - de la precesión del perihelio del planeta Mercurio y por las observaciones que el mismoo Eddington realizó acerca de la curvatura de la trayectoria de un rayo de luz de una estrella lejana que pasa cerca del Sol o también por observaciones del corrimiento al rojo gravitatorio de algunas líneas espectrales de objetos lejanos.

Sin embargo el camino inverso, aquél de las aplicaciones de la Relatividad General a la Astronomía, y en particular a la Mecánica Celeste, tardó un poco más en desarrollarse, siempre que no tomemos en cuenta al campo de la Cosmología, que era casi inexistente antes de 1915.

Este trabajo está dedicado a ese tipo de aplicaciones. En las siguientes páginas intentaremos dar una somera introducción a la teoría de la Relatividad General, con la finalidad de encontrar un algoritmo computacional que nos permita aplicarla a problemas de Mecánica Celeste.

La Mecánica Celeste nació básicamente al mismo tiempo que la física y que toda la ciencia moderna, con los descubrimientos de Newton acerca de las leyes del movimiento y su ley de la gravitación universal. Utilizando esos conocimientos Halley fue capaz de predecir el retorno del cometa que hoy lleva su nombre en el año 1758. A decir verdad, Halley fue en gran parte responsable de la publicación del que sin duda compite por ser el libro más importante de toda la historia de la ciencia, los *Principia* de Newton. [7][20]

En su texto, Newton trató el problema de dos cuerpos que se atraen gravitacionalmente según la ley que él mismo había descubierto, y determinó la forma geométrica que tendrían sus órbitas. En el universo, sin embargo, abundan los objetos con masa, y fue por eso que casi todos los grandes matemáticos y físicos posteriores a Newton investigaron con gran entusiasmo el problema de describir el movimiento que tendrían *tres* cuerpos con masa. Esa investigación sirvió a la larga para demostrar que no existe ninguna solución analítica al problema de los tres cuerpos, que es lo que ahora llamamos un sistema *caótico.*

El desarrollo de la computación ha permitido, a partir del siglo pasado, atacar este tipo de problemas mediante el método de las simulaciones numéricas, el cual ha resultado ser muy fértil en el campo de la Mecánica Celeste, y particularmente en el de la Dinámica del Sistema Solar, con todos sus planetas y cuerpos menores. En Uruguay se investiga muy activamente en este campo.

Es entonces a esta clase de problemas, a este tipo de simulaciones, a los que queremos aplicar las correcciones de índole relativista. Es algo que sin duda ya se ha intentado antes [18][22], pero quizás no de manera completamente sistemática o completa, y por más de un motivo.

En primer lugar, las correcciones relativistas son muy pequeñas y en general casi despreciables para un Sistema Solar con las características del nuestro, y más aún si se las compara con otras correcciones clásicas que también existen. La corrección relativista a la precesión del perihelio de Mercurio, por ejemplo, es de 43 segundos de arco por siglo, pero la precesión clásica causada por los otros planetas según la teoría de Newton es de unos 532 segundos de arco por siglo. Además hay que tener en cuenta que como ya se ha dicho la teoría no es nada trivial, y por lo tanto no siempre parece ser eficiente utilizarla.

En particular, en el Sistema Solar hay muy pocos objetos para los cuales las correcciones relativistas serían relevantes, aquellos que en algún punto de su órbita están lo suficientemente cerca del Sol como para que el campo gravitatorio tenga la intensidad suficiente para generar alguna diferencia con la solución clásica.

Sin embargo, aunque pocos, existen algunos objetos con esas características en nuestro Sistemas Solar, entre los cuerpos menores. Se conocen varios asteroides con un perihelio bastante menor al de Mercurio (el ejemplo clásico es el asteroide Icarus), y también existen varios cometas que pasan a distancias mínimas del Sol, llegando a veces a chocar contra él.

Hay además otra posible aplicación, desde hace ya varios años. En la gran mayoría de los sistemas planetarios extrasolares que se han descubierto, los planetas parecen girar mucho más cerca de su sol de lo que lo hace Mercurio alrededor del nuestro, además de ser mucho más masivos. En estos sistemas las correcciones relativistas podrían ser relevantes.

Este trabajo comienza con esas consideraciones en mente. El objetivo final es lograr ampliar los simuladores numéricos existentes (por ejemplo el EVORB[8]) para que tengan en cuenta las correcciones relativistas, y determinar cuánta exactitud en las mismas es realmente relevante.

Capítulo 2

Nociones básicas de Relatividad General

En este capítulo se intentará dar una introducción a la Teoría básica de Relatividad General, de modo que el trabajo quede mínimamente autocontenido. Se supone algún conocimiento previo de Relatividad Especial y de Cálculo Tensorial. El lector interesado en una mayor profundidad deberá consultar la bibliografía, por ejemplo[2][24][28].

2.1. La Geometría de Minkowski

La Teoría de la Relatividad Especial surgió hace ya cien años como un intento de resolver varias paradojas que se estaban dando en el marco de la Física Teórica[19], mientras se intentaba congeniar la Mecánica Clásica de Newton con la recientemente completada Teoría Electromagnética de Maxwell. Como se sabe, ésta última predecía una velocidad para la luz que no dependía del sistema de referencia inercial escogido, mientras que para Newton cualquier velocidad es siempre *relativa* a un cierto sistema de referencia, y por ende depende del mismo.

Einsten pues decidió dudar acerca de la validez de la teoría clásica, y su teoría genera cambios en la definición de lo que es un sistema inercial, de modo que cualquier cambio de coordenadas deja invariante a la velocidad de la luz c. Este tipo de transformaciones de coordenadas llevan el nombre de *lorentzianas*, y difieren en varios aspectos de las clásicas o *galileanas*.

Los nuevos cambios de coordenadas no son muy intuitivos pues mezclan coordenadas espaciales y temporales. Eso da lugar a varios fenómenos que desafían al sentido común. De todos modos no es razonable esperar que nuestro sentido común se aplique a cosas que viajan cerca de la velocidad de la luz. En la teoría de la Relatividad Especial uno deja de hablar del espacio y del tiempo y empieza a analizar el *espacio-tiempo*, un concepto más amplio donde el tiempo sería algo parecido a una cuarta coordenada espacial.[1]

Las transformaciones de Lorentz dejan fijo el valor de la cantidad $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$, dado que en particular los rayos de luz deben transformarse en rayos de luz, y las trayectorias en el espacio tiempo de los mismos, en unidades en las que $c = 1$, cumplen $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$. Esta cantidad conservada recibe el nombre de *intervalo* espacio-temporal, o también *tiempo propio*.

Esto último recuerda el caso de la geometría euclidiana, donde las rotaciones mantienen fija la norma al cuadrado de los vectores $x^2+y^2 = x'^2+y'^2$. En nuestro caso las "rotaciones" serían las transformaciones de Lorentz y la "norma" vendría dada por $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$, donde las primas indican cualquier otro sistema de coordenadas inercial.

Esta norma viene dada por un producto interno que puede caracterizarse por un tensor, llamado métrica de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, 1, 1, 1)$, de modo que el producto interno entre dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ queda definido por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\eta\mathbf{y} = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = -x^0y^0 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$$

Donde hay que tener en cuenta que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores del espacio-tiempo, y tienen por ende cuatro componentes, que van de cero a tres, donde la componente cero se identifica con la componente temporal. En el tercer término utilizamos la *convención de Einstein*, según la cual dos índices repetidos indican una sumatoria en dicho índice. Otra convención es la utilización de caracteres griegos para numerar índices espacio-temporales y latinos para limitarse a los espaciales, de modo que la última igualdad también pudo haber sido escrita

$$\eta_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = -x^0y^0 + x^iy^i$$

Los vectores del espacio-tiempo pueden ser representados de la forma $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$, donde a partir de ahora reservamos la notación $\mathbf{x}$ para vectores puramente espaciales.

Al lugar geométrico formado por los rayos de luz que pasan por un evento en el espacio tiempo (representado por un punto en un espacio con cuatro dimensiones) se lo llama el *cono de luz* y cumple, como ya dijimos, con la ecuación $\mathbf{x}^2 - (x^0)^2 = 0$. La métrica de Minkowski, entonces, preserva la estructura del cono de luz.

La Relatividad Especial tuvo mucho éxito en resolver las paradojas que tenía la Física a finales del siglo XIX. Sin embargo Einstein no quedó del todo conforme con su teoría, debido, entre otras cosas, a que era incompatible con la Ley de la Gravitación Universal de Newton, uno de los pilares de la Mecánica Clásica.

[1] Con la sutil distinción de que en el tiempo uno sólo puede moverse para *adelante*, nunca para atrás

En la teoría de la gravitación de Newton, por ejemplo, las perturbaciones en los campos gravitatorios de las masas en movimiento son instantáneas y, por ende, viajan a una velocidad infinitamente mayor que la de la luz, posibilidad excluída en la teoría de Einstein, en la que ni siquiera se puede definir el concepto de simultaneidad no local. Además se llega a cierto número de paradojas si se realizan experimentos mentales con un cuerpo masivo en un espacio-tiempo de Minkowski.

Es por eso que Einstein dedica diez años de su vida a la generalización de la Relatividad, con el fin de encontrar una teoría moderna de la gravitación. El desarrollo de esta nueva teoría fue muy costoso, en gran parte debido a que las herramientas matemáticas necesarias eran poco conocidas por la comunidad física de la época.

2.2. Geometría riemanniana

El descubrimiento de la geometría no euclidiana fue una de las más grandes revoluciones que sufrió la matemática en toda su historia. Euclides tuvo que axiomatizar, en su monumental obra *Elementos*, que por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela a esa recta (en realidad utilizó un axioma equivalente) y durante siglos los matemáticos lucharon inútilmente, intentando demostrar ese axioma a partir de los otros sin ningún éxito.

Finalmente, hacia finales del siglo $XVIII$ se terminó aceptando que ése último axioma de Euclides era necesario, y que se podían crear geometrías alternativas completamente válidas si uno utilizaba otro axioma en su lugar. Esas geometrías no euclidianas eran chocantes para la intuición que uno tiene de conceptos como "punto", o "recta", pero eran internamente consistentes, y por ende absolutamente útiles como teorías matemáticas.

Por ejemplo en una esfera uno puede hablar de "rectas", definidas por círculos máximos sobre la esfera, que cumplen todos los requisitos de las rectas geométricas (dos puntos definen una recta, la recta es la mínima distancia entre ellos, etc). Para estas "rectas" generalizadas, que los matemáticos empezaron a llamar *geodésicas* para evitar confusiones innecesarias, el axioma de las paralelas no tiene por qué cumplirse. En el caso particular de la esfera, por cualquier punto no pasa *ninguna* paralela a una geodésica dada, ya que todos los círculos máximos se cortan entre sí en más de un punto.

Más adelante, Gauss y Riemann intentaron sistematizar el estudio de las geometrias no euclidianas, o curvas. Fueron los primeros en distinguir entre las propiedades *internas* de una superficie, es decir, aquellas que experimentarían insectos caminando sobre las mismas, y las *externas*, que reflejan el hecho de que las superficies pueden estar inmersas en un espacio de mayor dimensión. Determinaron que lo fundamental para definir una geometría es la manera de medir distancias y ángulos en cada punto de la superficie o espacio. Como cualquiera que tenga cierta formación en álgebra lineal debe saber, la forma correcta de medir longitudes y ángulos es utilizando un producto interno de vectores. Por ende, una geometría viene definida por un producto interno en cada punto del espacio.

A este producto interno se lo llama la *métrica* $g_{\mu\nu}$, y es un tensor simétrico que toma dos vectores y devuelve su producto interno $g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = x \cdot y$. En particular $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica (plana) del espacio de Minkowski.

Ahora bien, un espacio con una métrica arbitraria en cada punto es una definición quizás excesivamente amplia de una geometría, y por lo tanto Gauss decidió que lo mejor era acotar un poco la definición, incluyendo únicamente las entidades a las que intuitivamente uno llamaría "geométricas".

Gauss asumió que en cualquier región lo suficientemente pequeña del espacio sería posible encontrar un sistema de coordenadas localmente euclídeo (ξ_1, ξ_2) tal que la distancia entre dos puntos con coordenadas (ξ_1, ξ_2) y $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ satisface el teorema de pitágoras

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2$$

Por ejemplo, es posible construir un sistema de coordenadas localmente eucídeo en cualquier punto en una superficie curva, utilizando las coordenadas cartesianas de un plano tangente a la superficie en ese punto. Esto, sin embargo, no debe hacernos creer que las definiciones de Gauss están relacionadas a las propiedades externas. Todo el tiempo estamos hablando de relaciones métricas internas en entornos infinitesimales.

Si la superficie no fuera euclídea, no sería posible cubrir ninguna parte *finita* de la misma con un sistema de coordenadas (ξ_1, ξ_2) que cumpliese la ley de Pitágoras. Supongamos que utilizamos algún otro sistema de coordenadas (x_1, x_2) que *sí* cubre el espacio y nos preguntamos qué es lo que podemos decir utilizando el método de Gauss. Es fácil calcular que la distancia ds entre puntos (x_1, x_2) y $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ viene dada por

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2)dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2)dx_2^2$$

donde

$$g_{11} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)^2 \tag{2.1}$$

$$g_{12} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right) \tag{2.2}$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right)^2 \tag{2.3}$$

Esta forma de ds^2 es típica de un *espacio métrico*. Esta derivación es reversible, en el sentido de que dado cualquier espacio con un ds^2 del tipo mostrado aquí, siempre es posible elegir en cualquier punto un sistema local de coordenadas euclídeas que satisfagan Pitágoras.

Esta teoría matemática fue desarrollada hacia finales del siglo XIX hasta convertirse en una muy elegante estructura matemática, que terminó encontrando una aplicación física en los trabajos de Einstein.

2.3. El Principio de Equivalencia

El principio de Equivalencia fue el primer resultado que Einstein encontró en su formulación de la nueva teoría, y data de 1908. El principio depende de la equivalencia entre masa inercial y masa gravitatoria, demostrada por Galileo, Huygens, Newton, Bessel y Eötvös, entre otros. Einstein dedujo que, como consecuencia de esta igualdad, un campo gravitatorio estático y homogéneo no podría ser detectado dentro de un ascensor en caída libre, dado que los observadores, todo su instrumental, y el propio ascensor responden al campo con la misma aceleración.

Esto puede ser probado fácilmente para un sistema de N partículas moviéndose a velocidades no relativistas, bajo la influencia de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M)$ (por ejemplo electrostáticas o gravitatorias) y un campo externo de gravedad $\mathbf{g}$.

Las ecuaciones de movimiento son

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}_N}{dt^2} = m_N \mathbf{g} + \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M) \tag{2.4}$$

Supongamos que aplicamos una transformación no galileana de las coordenadas espacio-temporales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \qquad t' = t \tag{2.5}$$

Entonces $\mathbf{g}$ va a ser cancelado por una "fuerza" inercial, y la ecuación de movimiento se convertirá en

$$m_N \frac{d^2\mathbf{x}'_N}{dt'^2} = \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}'_N - \mathbf{x}'_M) \tag{2.6}$$

Por ende el observador original O que usa coordenadas $\mathbf{x}t$, y su amigo en caída libre O' que usa $\mathbf{x}'t'$ no van a detectar ninguna diferencia en las leyes de la mecánica, con la excepción de que O sentirá un campo gravitatorio y O' no. El principio de equivalencia dice que esta cancelación de la gravedad por fuerzas inerciales (y por lo tanto su equivalencia) se da para *todos* los sistemas en caída libre, incluso si no pueden ser descritos por ecuaciones sencillas de la forma (2.4).

La forma final del principio de equivalencia es un poco más complicada, porque todavía no hemos tratado campos gravitatorios que no sean homogéneos y estacionarios. Si $\mathbf{g}$ dependiese de $\mathbf{x}$ o t no hubiera sido posible eliminarla de las ecuaciones de movimiento utilizando una aceleración como en la ecuación (2.5). Por ejemplo, la Tierra se encuentra en caída libre hacia el sol, y la mayor parte del tiempo nosotros no sentimos el campo gravitatorio solar, sin embargo la pequeña inhomogeneidad de este campo (algo así como una parte en seis mil) es suficiente para generar grandes mareas en los océanos. Incluso los observadores en el ascensor en caída libre de Einstein serían en principio capaces de detectar el campo de la Tierra, debido a que los objetos en el ascensor caerían radialmente hacia el centro de la Tierra y por ende se aproximarían a medida que el ascensor desciende.

A pesar de que las fuerzas inerciales no cancelan exactamente a las gravitatorias para un sistema en caída libre en un campo gravitatorio inhomogéneo o dependiente del tiempo, podemos de todos modos esperar una cancelación aproximada si restringimos nuestra atención a regiones del espacio y del tiempo lo suficientemente pequeñas como para que el campo cambie muy poco a lo largo de la región.

Vamos entonces a formular el principo de equivalencia del siguiente modo

> **Principio de Equivalencia** *En cualquier punto del espacio-tiempo bajo un campo gravitatorio arbitrario, es posible elegir un "sistema de coordenadas localmente inercial" tal que, dentro de una región lo suficientemente pequeña alrededor del punto en cuestión, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que en un sistema cartesiano de coordenadas no acelerado y en ausencia de gravitación.*

El enunciado es un poco vago en cuánto a lo que se quiere decir con "la misma forma que en un sistema cartesiano de coordenadas no acelerado", de modo que para evitar cualquier confusión podemos especificar que con esto queremos decir la forma que tienen las leyes de la naturaleza en la teoría de la Relatividad Especial. También está la cuestión de cuán pequeño es "lo suficientemente pequeño". Lo que se quiere dar a entender, sin mucha exactitud, es que la región debe ser lo suficientemente pequeña como para que el campo gravitatorio sea prácticamente constante a lo largo de ella, pero para ser más preciso se tendría que tener una forma de representar matemáticamente al campo gravitatorio.

Es notorio entonces el parecido entre las geometrías no euclideanas y el Principio de Equivalencia. Este último dice que en cualquier punto del espacio-tiempo podemos definir un sistema de coordenadas localmente inercial en el cual la materia satisfaga las leyes de la Relatividad Especial. Como vimos antes, el postulado básico de las geometrías no euclideanas es que en cualquier punto de una superficie curva se puede definir un sistema de coordenadas localmente cartesiano en el cual las distancias obedecen el teorema de Pitágoras. Debido a esta profunda analogía, deberíamos esperar que las leyes de la gravitación muestren un fuerte parecido a las fórmulas de la geometría riemanniana. En particular el postulado de Gauss implica que todas las propiedades internas de una superficie curva pueden ser descritas en términos de las derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ de la función $\xi^\alpha(x)$ que define la transformación $x \to \xi$ de un sistema general de coordenadas x^μ que cubre la superficie al sistema local cartesiano ξ^α, mientras que el Principio de Equivalencia nos dice que todos los efectos de un campo gravitatorio pueden ser descritos en términos de derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ de la función $\xi^\alpha(x)$ que define la transformación de las coordenadas x^μ "del laboratorio" a las coordenadas localmente inerciales ξ^α. Más aún, ya vimos que las funciones geométricamente relevantes de estas derivadas eran las cantidades $g_{\mu\nu}$ que definen al tensor métrico, y lo mismo ocurrirá en el estudio de la gravitación.

2.3.1. Símbolos de Christoffel

Según el Principio de Equivalencia existe alrededor de cualquier punto un sistema de coordenadas ξ^α tal que

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{2.7}$$

donde $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$ es el *tiempo propio* del sistema de coordenadas. El tiempo propio es el parámetro que mide la longitud de la curva que recorre el sistema de coordenadas en caída libre en el espacio-tiempo, y la ecuación es básicamente la definición de un sistema inercial, caso en el que dicha curva sería una linea recta.

Ahora bien, consideremos un nuevo sistema de coordenadas arbitrario x^μ, y las funciones $\xi^\alpha(x^\mu)$ que definen el cambio de coordenadas. Entonces la ecuación (2.7) se reescribiría

$$0 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Y entonces, utilizando regla de la cadena

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \tag{2.8}$$

con

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu\partial x^\nu}$$

los *Símbolos de Christoffel*.

Haciendo un cierto número de cuentas se puede encontrar la relación entre los símbolos de Christoffel y las distintas componentes de la métrica.

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left\{\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}\right\} \tag{2.9}$$

Donde $g^{\mu\rho}$ es el tensor *inverso* a la métrica, $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. De la ecuación (2.9) vemos que los símbolos de Christoffel están relacionados a derivadas primeras de la métrica $g_{\mu\nu}$. Es por eso que, aunque siempre es posible elegir un sistema local de coordenadas inerciales (eso es, con $\Gamma = 0$), un sistema *global* de coordenadas inerciales únicamente podrá existir en el caso de que también las derivadas *segundas* de la métrica se anulen.

Antes de seguir adelante vamos a definir algo más de notación. A veces en cálculo tensorial se utiliza la abreviación $A_{,b}$ para representar $\partial A/\partial x^b$, con A un tensor cualquiera. Esta notación será altamente utilizada en el capítulo siguiente.

2.3.2. Curvatura

Para estudiar la curvatura del espacio-tiempo comenzaremos con su definición matemática. El *tensor de curvatura de Riemann* se define como

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma\eta_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \tag{2.10}$$

El tensor de curvatura mide algo así como la “no planitud” del espacio en cuestión, es decir cuán alejado se encuentra del euclideo. La curvatura es una propiedad intrínseca del espacio y no hay que visualizarla como función de un espacio externo; la curvatura de una esfera, por ejemplo, no depende de estar inmersa en nuestro espacio tridimensional.

Lo primero que uno puede hacer para darse cuenta de que está en un espacio curvo es construir un triángulo. Sabemos que en un espacio plano la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados. En un espacio curvo, en cambio, la suma puede ser mayor (espacio con curvatura positiva) o menor (negativa). De hecho, el mismo Gauss tuvo la idea de realizar un experimento utilizando un triangulo formado por estrellas lejanas para determinar que tipo de espacio es éste en el que vivimos. Según la teoría de Einstein, como veremos más adelante, la curvatura depende de la cantidad de materia en cada región del espacio-tiempo.

La mejor manera de ver la curvatura es quizás mediante el concepto de *transporte paralelo*, esto es, el transporte de un vector a lo largo de una curva de forma tal que el vector tenga siempre derivada covariante nula con respecto al vector velocidad de la misma, donde la derivada covariante no es otra cosa que una derivada generalizada para cualquier espacio equipado con una métrica[5].

En el espacio euclideo un vector es siempre igual a su transportado a lo largo de cualquier curva. En un espacio curvo Se puede demostrar que el cambio en un vector S^{μ} al ser transportado alrededor de una curva cerrada es igual a

$$\Delta S^{\mu} = \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} S_{\sigma} \oint x^{\rho} dx^{\nu}$$

De modo que el cambio es de alguna forma proporcional a la curvatura. El fenómeno es fácil de ver en una esfera, transportando por ejemplo un vector a lo largo del ecuador hasta su antípoda, y luego a lo largo de un meridiano – pasando por el polo – hasta su punto inicial. Si el vector a la salida era tangente al ecuador, a la llegada es perpendicular al mismo.

Si volvemos a mirar la definición del tensor de Riemann (2.10) junto a la de los símbolos de Christoffel (2.9), veremos que la curvatura es función de derivadas segundas de la métrica.

A partir del tensor de Riemann se puede definir otro tensor de curvatura, una versión contraída que lleva el nombre de *tensor de Ricci*. Resulta ser de gran importancia para Relatividad General.

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} \tag{2.11}$$

Se puede probar que es la única contracción posible del tensor de Riemann, módulo un signo.

2.4. La ecuación de Einstein

La geometría del espacio-tiempo nos da entonces el movimiento de la materia, según la ecuación de las geodésicas, que en realidad son cuatro ecuaciones diferenciales, una para cada coordenada. Sin embargo eso sólo es la mitad de la Teoría de la Relatividad, dado que todavía nos falta describir cuál es la influencia de la materia en el campo gravitatorio, es decir en la curvatura del espacio-tiempo.

Las ecuaciones de campo de Einstein son inevitablente más complicadas que, por ejemplo, las de Maxwell. Para empezar las de Maxwell son lineales, dado que el campo electromagnético no tiene carga; los campos gravitatorios, sin embargo, tienen su propia energía, que los retroalimenta. Es por eso que estaremos hablando aquí de sitemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales, donde la no linealidad representa el efecto de la gravitación sobre sí misma.

El propio Einstein demoró varios años en encontrar una expresión satisfactoria para el efecto de la materia sobre el campo gravitatorio. Los argumentos para justificar la ecuación final son a veces un tanto ad hoc, y el propio Einstein, comparando las dos partes en que consiste su teoría, siempre declaró su preferencia por la primera, que según él parecía "hecha de mármol", a diferencia de su ecuación, que parecía "hecha en madera".

La ecuación de Einstein es entonces

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.12}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ es la curvatura escalar, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de momento-energía (que depende de la distribución de materia en el espacio- tiempo) y el factor $8\pi G$ sirve para hacer coincidir el límite de bajas velocidades de la teoría con la teoría clásica de Newton.

La ecuación de Einstein puede también escribirse

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}) \tag{2.13}$$

en ambas versiones tenemos de un lado de la igualdad términos de curvatura y del otro términos de densidades de materia y energía.

La ecuación de Einstein es en realidad un conjunto de diez ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden en la métrica, una para cada componente relevante de la misma, que es simétrica.

2.5. El límite newtoniano

Ahora bien, como cualquier teoría que contradiga al sentido común, la Relatividad General tiene su primer *test* en su límite clásico. Es decir: ¿Se corresponde el límite de bajas velocidades y masas de la teoría de Einstein con la teoría clásica de Newton? Sabemos que esta última ha sido confirmada una gran cantidad de veces en esos rangos.

Pues bien, para hacer la conexión con la teoría de newton consideremos el caso de una partícula moviéndose lentamente a través de un campo gravitatorio débil y estacionario. Si la particula se mueve con la suficiente lentitud podemos despreciar $d\mathbf{x}/d\tau$ con respecto a $dt/d\tau$ y escribir la ecuación de movimiento (2.8) como

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

Dado que el campo es estacionario todas las derivadas temporales de $g_{\mu\nu}$ se anulan y por lo tanto, utilizando la definición de los símbolos de Christoffel (2.9)

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}$$

Finalmente, dado que el campo es débil, podemos adoptar un sistema de coordenadas casi minkowskiano en el cual

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \tag{2.14}$$

de modo que a primer orden en $h_{\alpha\beta}$

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}$$

Utilizando estos símbolos de Christoffel en la ecuación de movimiento obtenemos

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00}$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

La solución de la segunda ecuación es que $dt/d\tau$ es constante (lo cual también podría deducirse calculando $d\tau$ despreciando $h_{\alpha\beta}$), de modo que dividiendo la primera ecuación entre $(dt/d\tau)^2$ encontramos

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{2}\nabla h_{00} \tag{2.15}$$

El resultado clásico correspondiente es

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt} = -\nabla\phi \tag{2.16}$$

donde ϕ es el potencial gravitatorio, el cual a una distancia r del centro de un cuerpo esférico de masa M toma el valor

$$\phi = -\frac{GM}{r} \tag{2.17}$$

Comparando entonces (2.15) con (2.16) llegamos a la conclusión de que

$$h_{00} = -2\phi + const.$$

Además el sistema de coordenadas debe volverse minkowskiano a distancias grandes, de modo que h_{00} se anula en el infinito, y si definimos a ϕ para que se anule en el infinito [como en (2.17)], encontramos que la constante es cero, de modo que $h_{00} = -2\phi$, y volviendo a la métrica (2.14)

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \tag{2.18}$$

Si consideramos al límite clásico como una aproximación a la teoría de Einstein vemos que sólo nos estaríamos quedando con términos de primer orden en la diferencia entre $g_{\mu\nu}$ y el tensor de minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Como $g_{00} - 1$ es en esta aproximación de orden GM/r, y utilizando la ecuación (2.15) vemos que la aproximación newtoniana nos da la aceleración d^2x^i/dt^2 a orden GM/r^2, que veremos es equivalente a decir a orden v^2/r. En este trabajo intentaremos llevar la aproximación un paso más adelante.

Capítulo 3

El algoritmo post-newtoniano

3.1. Deducción del algoritmo

En esta sección deduciremos el algoritmo a utilizar para corregir los cálculos clásicos de movimiento orbital. Seguiremos aquí la deducción dada por Weinberg en [28]. El procedimiento es algo engorroso pero no presenta mayor dificultad para el lector acostumbrado a la Relatividad General.

Por supuesto, la base de todo este trabajo es utilizar una aproximación a las ecuaciones de Einstein, más en particular una para objetos lentos, donde la lentitud o rapidez de un objeto se define en comparación a la velocidad de la luz, c. Esta aproximación recibe el nombre de *post-newtoniana*, y no es otra cosa que un desarrollo en órdenes de la velocidad de los objetos, v/c.

Consideremos al Sistema Solar como un sistema de particulas masivas, que se relacionan entre sí por medio de su atracción gravitatoria mutua. Llamemos M, r y v a los valores típicos para las masas, distancias y velocidades de las particulas respectivamente. Un resultado familiar de la mecánica newtoniana nos dice que la energía cinética típica $Mv^2/2$ será aproximadamente del mismo órden de magnitud que la energía potencial típica GM^2/r, de modo que podemos concluir

$$v^2 \sim \frac{GM}{r} \tag{3.1}$$

La aproximación post-newtoniana nos permitirá obtener el movimiento del sistema a un orden superior del parámetro v^2 que el que nos da la mecánica newtoniana. Para simplificar los cálculos deduciremos las ecuaciones relevantes utilizando un sistema de unidades en el que la velocidad de la luz c sea igual a uno. Más adelante se podrá hacer el cambio a otros sistemas de unidades.

Veamos qué es lo que necesitamos; las ecuaciones de movimiento para las partículas son

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

Con esto podemos calcular las aceleraciones, separando los índices en temporales y espaciales y utilizando la regla de la cadena

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1}\frac{dx^i}{d\tau}\right]$$

$$= \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2}\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-3}\frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{dx^i}{d\tau}$$

$$= -\Gamma^i_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt} + \Gamma^0_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dx^\lambda}{dt}\frac{dx^i}{dt}$$

Que puede ser escrito más detalladamente, separando completamente los índices espaciales y temporales, como

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} - 2\Gamma^i_{0j}\frac{dx^j}{dt} - \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} +$$

$$+ \left[\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^0_{0j}\frac{dx^j}{dt} + \Gamma^0_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right]\frac{dx^i}{dt} \tag{3.2}$$

En la aproximación newtoniana vista en el capítulo 2 anterior consideramos que todas las velocidades eran despreciables y sólo conservamos términos de primer orden de la diferencia entre la métrica $g_{\mu\nu}$ y el tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ y encontramos

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \simeq -\Gamma^i_{00} \simeq \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

Pero $g_{00} - 1$ es de orden GM/r, por lo que la aproximación newtoniana nos dá la aceleración d^2x^i/dt^2 al orden GM/r^2, es decir al orden v^2/r. Nuestro objetivo será pues computar la aceleración al orden v^4/r. Para llevarlo a cabo necesitaremos calcular los símbolos de Christoffel a distintos órdenes, según la ecuación (2.9).

Es de esperar que sea posible encontrar un sistema de coordenadas en el cual el tensor métrico sea casi igual al de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, con correciones desarrollables en potencias de v^2. Algo así como

$$g_{00} = -1 + g^{(2)}_{00} + g^{(4)}_{00} + \ldots \tag{3.3}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g_{ij}^{(2)} + g_{ij}^{(4)} + \ldots \tag{3.4}$$

$$g_{i0} = g_{i0}^{(3)} + g_{i0}^{(5)} + \ldots \tag{3.5}$$

Donde los números entre paréntesis indican el orden en v del término. Nótese que sólo existen potencias pares o impares de v en los desarrollos, dependiendo de si el tiempo aparece en la métrica una cantidad par o impar de veces, respectivamente. Esto se debe a que g_{i0} debe cambiar de signo bajo una transformación de reversión temporal $t \rightarrow -t$ pero no así g_{00} o g_{ij}

La inversa del tensor métrico viene definida por las ecuaciones

$$g^{i\mu} g_{0\mu} = g^{i0} g_{00} + g^{ij} g_{j0} \tag{3.6}$$

$$g^{0\mu} g_{0\mu} = g^{00} g_{00} + g^{0i} g_{0i} \tag{3.7}$$

$$g^{i\mu} g_{j\mu} = g^{i0} g_{j0} + g^{ik} g_{jk} \tag{3.8}$$

Esperamos que

$$g^{00} = -1 + g^{00(2)} + g^{00(4)} + \ldots \tag{3.9}$$

$$g^{ij} = \delta_{ij} + g^{ij(2)} + g^{ij(4)} + \ldots \tag{3.10}$$

$$g^{i0} = g^{i0(3)} + g^{i0(5)} + \ldots \tag{3.11}$$

E insertando estos desarrollos - igualando orden a orden - en las ecuaciones (3.6)–(3.8), podemos encontrar las relaciones

$$g^{00(2)} = -g_{00}^{(2)} \qquad g^{ij(2)} = -g_{ij}^{(2)} \qquad g^{i0(3)} = -g_{i0}^{(3)} \qquad etc. \tag{3.12}$$

Los símbolos de Christoffel pueden ser calculados según su definición (2.9)

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right\}$$

Al calcular los símbolos de Christoffel hay que tener en cuenta que en los sistemas bajo estudio las escalas de tiempo y distancia vienen dadas por r/v y r respectivamente, de modo que las derivadas espaciales y temporales tendrán órdenes

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{v}{r}$$

Utilizando nuestros estimados (3.3)–(3.5) y (3.6)–3.8) encontramos que las componentes Γ^i_{00}, Γ^i_{jk} y Γ^0_{0i}, tienen las siguientes expansiones

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu(2)}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu(4)}_{\nu\lambda} + \dots \qquad (para \quad \Gamma^i_{00}, \Gamma^i_{jk}, \Gamma^0_{0i}) \tag{3.13}$$

mientras que los componentes Γ^i_{0j}, Γ^0_{00} y Γ^0_{ij} tienen expansiones

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu(3)}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\mu(5)}_{\nu\lambda} + \dots \qquad (para \quad \Gamma^i_{0j}, \Gamma^0_{00}, \Gamma^0_{ij}) \tag{3.14}$$

donde el símbolo $\Gamma^{\mu(N)}_{\nu\lambda}$ denota el término de orden v^N/r en el desarrollo. Los componentes necesarios para resolver (3.2) al orden requerido son entonces explícitamente

$$\Gamma^{i(2)}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^i} \tag{3.15}$$

$$\Gamma^{i(4)}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{(4)}_{00}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{(3)}_{i0}}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{(2)}_{ij}\frac{\partial g_{00^{(2)}}}{\partial x^j} \tag{3.16}$$

$$\Gamma^{i(3)}_{0j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g^{(3)}_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^{(2)}_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial g^{(3)}_{j0}}{\partial x^i}\right] \tag{3.17}$$

$$\Gamma^{i(2)}_{jk} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g^{(2)}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g^{(2)}_{ik}}{\partial j} - \frac{\partial g^{(2)}_{jk}}{\partial x^i}\right] \tag{3.18}$$

$$\Gamma^{0(3)}_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial t} \tag{3.19}$$

$$\Gamma^{0(2)}_{0i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^i} \tag{3.20}$$

$$\Gamma^{0(1)}_{ij} = 0 \tag{3.21}$$

Es evidente entonces que tendremos que conocer los componentes g_{ij} al orden v^2, g_{i0} al orden v^3 y g_{00} al orden v^4. En contraste, la aproximación newtoniana sólo requería conocer g_{00} al orden v^2 y g_{i0} y g_{ij} a cero orden.

Para calcular el tensor de Ricci utilizaremos su definición (2.11) y (2.10):

$$R_{\mu\kappa} \equiv R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\eta\lambda}$$

Y podemos hallar también una expansión para los componentes de $R_{\mu\kappa}$, utilizando (3.13) y (3.14). Los términos que se pueden calcular utilizando los símbolos de Christoffel al orden disponible son

$$R_{00}^{(2)} = -\frac{\Gamma_{00}^{i(2)}}{\partial x^i} \tag{3.22}$$

$$R_{00}^{(4)} = \frac{\Gamma_{0i}^{i(3)}}{\partial t} - \frac{\Gamma_{00}^{i(4)}}{\partial x^i} + \Gamma_{0i}^{0(2)}\Gamma_{00}^{i(2)} - \Gamma_{00}^{i(2)}\Gamma_{ij}^{j(2)} \tag{3.23}$$

$$R_{i0}^{(3)} = \frac{\Gamma_{ij}^{j(2)}}{\partial t} - \frac{\Gamma_{0i}^{j(3)}}{\partial x^j} \tag{3.24}$$

$$R_{ij}^{(2)} = \frac{\Gamma_{i0}^{0(2)}}{\partial x^j} + \frac{\Gamma_{ik}^{k(2)}}{\partial x^j} - \frac{\Gamma_{ij}^{k(2)}}{\partial x^k} \tag{3.25}$$

Que, utilizando (3.15)–(3.21) nos da

$$R_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}^{(2)} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} R_{00}^{(4)} = {} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ii}^{(3)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g_{i0}^{(3)}}{\partial x^i \partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}^{(4)} - \frac{1}{2} g_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2 g^2 00}{\partial x^i \partial x^j} - \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial x^j}\right)\left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i}\right) + \\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial g_{00}^{(2)}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial g_{ij}^{(2)}}{\partial x^i}\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$R_{i0}^{(3)} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{jj}^{(2)}}{\partial x^i \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{j0}^{(3)}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ij}^{(2)}}{\partial x^j \partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2 g_{i0}^{(3)} \tag{3.28}$$

$$R_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{00}^{(2)}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{kk}^{(2)}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{ik}^{(2)}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{kj}^{(2)}}{\partial x^k \partial x^i} + \nabla^2 g_{ij}^{(2)} \tag{3.29}$$

Estas ecuaciones tan manifiestamente desagradables pueden ser simplificadas en gran medida si elegimos un sistema de coordenadas especial, utilizando la libertad que nos da la teoría.

Para ver esto comencemos recordando que el tensor simétrico $G_{\mu\nu}$ tiene diez componentes independientes, de modo que las ecuaciones de campo de Einstein consisten en diez ecuaciones algebraicamente independientes. El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ tiene también diez componentes algebraicamente independientes y quizás uno se vería tentado a pensar que las ecuaciones de Einstein alcanzarían para determinar $g_{\mu\nu}$ de forma única. Sin embargo, esto no es así.

Aunque son algebraicamente independientes, las diez $G_{\mu\nu}$ están relacionadas por cuatro identidades, las identidades de Bianchi:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$$

Por lo tanto no tenemos diez ecuaciones funcionalmente independientes, sino tan solo $10 - 4 = 6$, dejándonos cuatro grados de libertad en las diez incógnitas $g_{\mu\nu}$. Estos grados de libertad corresponden al hecho de que si $g_{\mu\nu}$ es una solución de la ecuación de Einstein, entonces tambien lo es $g'_{\mu\nu}$, donde $g'_{\mu\nu}$ se determina a partir de $g_{\mu\nu}$ mediante un cambio de coordenadas general $x \to x'$. Una transformación de coordenadas de este tipo viene dada por cuatro funciones arbitrarias $x'^{\mu}(x)$.

La insuficiencia de las ecuaciones de Einstein para determinar $g_{\mu\nu}$ de forma unívoca es análogo al problema que tienen las ecuaciones de Maxwell para determinar unívocamente al potencial vector A^{μ}. Hay (algo así como) una invariancia gauge en la teoría[1] Esta ambigüedad en el tensor métrico se puede eliminar mediante la elección de un sistema particular de coordenadas. Una elección de este tipo puede ser expresada mediante cuatro *condiciones de coordenadas*, que, junto a las seis ecuaciones independientes de Einstein, determinan completamente una solución.

En particular una elección muy conveniente de un sistema de coordenadas viene dada por las *condiciones de coordenadas armónicas*

$$\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \tag{3.30}$$

Para ver que siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas armónico, utilizaremos las ecuaciones de transformación para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}}$$

Contrayendo con $g'^{\mu\nu}$ encontramos

$$\Gamma'^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho} - g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} \tag{3.31}$$

De modo que si Γ^{ρ} es no nula siempre podemos definir un nuevo sistema de coordenadas x'^{λ} resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

$$g^{\rho\sigma}\frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}\partial x^{\sigma}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}}\Gamma^{\rho}$$

y la ecuacion (3.31) nos da entonces $\Gamma'^{\lambda} = 0$ en el sistema x'.

La forma más visual de caracterizar a los sitemas de coordenadas armónicos es mediante una analogía tridimensional. En el espacio euclídeo habitual el sistema armónico por excelencia es el cartesiano. Los sistemas de coordenadas polares o esféricos no cumplen con los requisitos. De algún

[1] El asunto es en realidad un poco más complicado que esto en la teoría de la Relatividad, pero no abundaremos en detalles.

modo la armonicidad de un sistema de coordenadas mide la "planitud" del mismo.

En relatividad general, en ausencia de campos gravitatorios, el sistema de coordenadas armónicas más obvio es el de Minkowski, con $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ En presencia de campos gravitatorios débiles los sistemas armónicos pueden ser pensados como casi minkowskianos.

Pasemos entonces a coordenadas armónicas, imponiendo (3.30) y utilizando las ecuaciones (3.6)–(3.12) y (3.15)–(3.21), para encontrar, utilizando un poco de álgebra, que la anulación del término de tercer orden de $g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ implica

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial t} - \frac{\partial g^{(3)}_{0i}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{ii}}{\partial t} \tag{3.32}$$

mientras que la anulación de los términos de segundo orden nos da

$$0 = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^i} - \frac{\partial g^{(2)}_{ij}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial g^{(2)}_{jj}}{\partial x^i} \tag{3.33}$$

Por lo tanto se puede ver que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{(2)}_{ii}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 g^{(3)}_{i0}}{\partial x^i \partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{(2)}_{00}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g^{(2)}_{ii}}{\partial t \partial x^j} - \frac{\partial^2 g^{(3)}_{i0}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g^{(2)}_{ij}}{\partial x^i \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g^{(2)}_{ij}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g^{(2)}_{kj}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g^{(2)}_{jj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g^{(2)}_{00}}{\partial x^i \partial x^k} = 0$$

De modo de (3.26)–(3.29) pueden ser simplificadas para llegar a

$$R^{(2)}_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g^{(2)}_{00} \tag{3.34}$$

$$R^{(4)}_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g^{(4)}_{00} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g^{(2)}_{00}}{\partial t^2} - \frac{1}{2} g^{(2)}_{ij}\frac{\partial^2 g^{(2)}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{1}{2}\left(\nabla^2 g^{(2)}_{00}\right)^2 \tag{3.35}$$

$$R^{(3)}_{0i} = \frac{1}{2}\nabla^2 g^{(3)}_{i0} \tag{3.36}$$

$$R^{(2)}_{ij} = \frac{1}{2}\nabla^2 g^{(2)}_{ij} \tag{3.37}$$

Ahora estamos listos para utilizar las ecuaciones de campo de Einstein, que vamos a tomar en la forma (2.13)

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\lambda}) \tag{3.38}$$

En base a su interpretación como la densidad de energía, la densidad de momento y el flujo de momento respectivamente, esperamos que T^{00}, T^{i0}, y T^{ij} tengan desarrollos

$$T^{00} = T^{(0)00} + T^{(2)00} + \dots \tag{3.39}$$
$$T^{0i} = T^{(1)0i} + T^{(3)0i} + \dots \tag{3.40}$$
$$T^{ij} = T^{(2)ij} + T^{(4)ij} + \dots \tag{3.41}$$

donde $T^{(N)\mu\nu}$ denota el término de $T^{\mu\nu}$ de orden $(M/r^3)v^N$. (En particular $T^{(0)00}$ es la densidad de masa en reposo, mientras que $T^{(2)00}$ es la parte no relativista de la densidad de energía.)

Vamos a necesitar definir

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda} \tag{3.42}$$

Pero GM/r es de orden v^2, de modo que (3.3)–(3.5) y (3.40)–(3.41) implican

$$S_{00} = S^{(0)}_{00} + S^{(2)}_{00} + \dots \tag{3.43}$$
$$S_{i0} = S^{(1)}_{i0} + S^{(3)}_{i0} + \dots \tag{3.44}$$
$$S_{ij} = S^{(2)}_{ij} + S^{(4)}_{ij} + \dots \tag{3.45}$$

donde $S^{(N)}_{\mu\nu}$ representa, poco originalmente, al término en $S_{\mu\nu}$ de orden Mv^N/r^3. En particular

$$S^{(0)}_{00} = \frac{1}{2}T^{(0)00} \tag{3.46}$$
$$S^{(2)}_{00} = \frac{1}{2}\left[T^{(2)00} - 2g^{(2)}_{00}T^{(2)}_{00} + T^{(2)ii}\right] \tag{3.47}$$
$$S^{(1)}_{i0} = -T^{(1)0i} \tag{3.48}$$
$$S^{(0)}_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}T^{(0)00} \tag{3.49}$$

Ahora, utilizando (3.34)–(3.37) y (3.44)–(3.49) en las ecuaciones del campo (3.38), encontramos que las ecuaciones de campo en coordenadas armónicas son consistentes con los desarrollos que hemos estado utilizando, y arrojan

$$\nabla^2 g^{(2)}_{00} = -8\pi G T^{(0)00} \tag{3.50}$$
$$\nabla^2 g^{(4)}_{00} = \frac{\partial^2 g^{(2)}_{00}}{\partial t^2} + g^{(2)}_{ij}\frac{\partial^2 g^{(2)}_{00}}{\partial x^i \partial x^j} - \left(\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^i}\right) -$$

$$-8\pi G \left[T^{(2)00} - 2g_{00}^{(2)} T^{(0)00} + T^{(2)ii}\right] \tag{3.51}$$

$$\nabla^2 g_{i0}^{(3)} = 16\pi G T^{(1)i0} \tag{3.52}$$

$$\nabla^2 g_{ij}^{(2)} = -8\pi G \delta_{ij} T^{(0)00} \tag{3.53}$$

De (3.50) encontramos, como era de esperarse

$$g_{00}^{(2)} = -2\phi \tag{3.54}$$

Donde ϕ es el *potencial newtoniano*, definido por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G T^{(0)00} \tag{3.55}$$

Además $g_{00}^{(2)}$ tiene que anularse en el infinito, por lo que la solución es

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -G \int d^3r' \frac{T^{(0)00}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{3.56}$$

A partir de (3.53) encontramos que la solución de $g_{ij}^{(2)}$ que se anula en el infinito es

$$g_{ij}^{(2)} = -2\delta_{ij}\phi \tag{3.57}$$

También podemos ver que $g_{i0}^{(3)}$ es un nuevo potencial vector ζ:

$$g_{i0}^{(3)} \equiv \zeta_i \tag{3.58}$$

y la solución de (3.52) que se anula en el infinito es

$$\zeta_i(\mathbf{r}, t) = -4G \int T^{(1)i0} \frac{(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \tag{3.59}$$

Finalmente, se puede simplificar la ecuación (3.51) utilizando (3.57), (3.55) y la identidad

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \equiv \frac{1}{2} \nabla^2 \phi^2 - \phi \nabla^2 \phi$$

El resultado es

$$g_{00}^{(4)} = -2\phi^2 - 2\psi \tag{3.60}$$

donde ψ es un segundo potencial

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 4\pi G [T^{(2)00} + T^{(2)ii}] \tag{3.61}$$

Nuevamente, $g_{00}^{(4)}$ tiene que anularse en el infinito, de modo que la solución es

$$\psi(\mathbf{r},t) = -\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\phi(\mathbf{r}',t)}{\partial t^2} + GT^{(2)00}(\mathbf{r}',t) + GT^{(2)ii}(\mathbf{r}',t)\right] \tag{3.62}$$

Ahora bien, ψ vendría a ser una corrección a “segundo” orden del potencial clásico ϕ. Veremos como existe un término de esta corrección que se debe al retardo de la señal gravitatoria, que no puede viajar más rápido que la luz.

Para hacer esto definamos primero un potencial $\Psi = \phi + \psi$. Utilizando (3.55) y (3.61) llegamos a que

$$\nabla^2\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 4\pi G[T^{(0)00} + T^{(2)00} + T^{(2)ii}] \tag{3.63}$$

Dado que al orden en que estamos trabajando $d^2\psi/dt^2 = 0$, y por lo tanto $d^2\Psi/dt^2 = d^2\phi/dt^2$. La ecuación (3.63) no es otra cosa que una ecuación de onda con fuentes. Su solución, que depende del estado de las fuentes a un tiempo retardado $t_{ret} = t - |\mathbf{r}|/c$, no es otra cosa que

$$\Psi(\mathbf{r},t) = -G\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[T^{(0)00}(\mathbf{r}',t_{ret}) + T^{(2)00}(\mathbf{r}',t_{ret}) + T^{(2)ii}(\mathbf{r}',t_{ret})\right]$$

Ahora bien, las correcciones por tiempo de retardo son de un orden superior al buscado para $T^{(2)\mu\nu}$, de modo que la única correccion por el retardo entrará a partir de $T^{(0)00}$, que como ya habíamos visto no es otra cosa que la masa de las partículas.

Se puede restar la ecuación (3.56) a ambos lados de la igualdad para que nos quede

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_1 + \psi_2 \tag{3.64}$$

con

$$\psi_1 = -G\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[T^{(0)00}(\mathbf{r}',t_ret) - T^{(0)00}(\mathbf{r}',t)\right] \tag{3.65}$$

$$\psi_2 = -G\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[T^{(2)00}(\mathbf{r}',t) + T^{(2)ii}(\mathbf{r}',t)\right] \tag{3.66}$$

Y si comparamos estas ecuaciónes con la ecuación (3.62) llegaremos a la conclusión de que toda la información acerca del retardo está en el término $d^2\phi/dt^2$ de aquella. Hay que enfatizar, entonces, cómo al orden de desarrollo en que estamos interesados el único retardo que entra en juego es el del potencial clásico ϕ.

Continuando con la deducción, ahora podemos ver que la condición de coordenadas armónicas (3.32) impone entre ϕ y ζ la relación

$$4\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \zeta = 0 \tag{3.67}$$

mientras que la otra condición de coordenadas (3.33) se satisface automáticamente.

Utilizando estos resultados podemos finalmente obtener los símbolos de Christoffel al orden buscado

$$\Gamma^{(2)i}_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{3.68}$$

$$\Gamma^{(4)i}_{00} = \frac{\partial}{\partial x^i}(2\phi^2 + \psi) + \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} \tag{3.69}$$

$$\Gamma^{(3)i}_{0j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^i}\right) - \delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.70}$$

$$\Gamma^{(2)i}_{jk} = -\delta_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^k} - \delta_{ik}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} + \delta_{jk}\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{3.71}$$

$$\Gamma^{(3)0}_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.72}$$

$$\Gamma^{(2)0}_{0i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \tag{3.73}$$

Y sustituyendo estos términos en la ecuación (3.2) podemos computar la aceleración de un cuerpo en caída libre al orden v^4/r. La ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = & -\nabla(\phi + 2\phi^2 + \psi) - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) + \\ & + 3\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - \mathbf{v}^2\nabla\phi \end{aligned} \tag{3.74}$$

Con esta ecuacion a la vista se hace necesario realizar un número de comentarios:

En primer lugar, observando la ecuación se puede identificar la naturaleza de los tres potenciales. El caso de ϕ es el más sencillo, ya que no es otra cosa que el potencial newtoniano, cuyas distintas derivadas aparecen como correcciones. ψ es una especie de correción a mayor orden de ϕ, que como vimos incluye entre otras cosas el retardo del campo ϕ y considera a mayor orden a la fuente $T^{\mu\nu}$ del campo gravitatorio.

El caso de ζ es quizás el más interesante. Siguiendo la ecuación podemos observar que se comporta en forma muy similar al potencial vector A en electromagnetismo clásico. Por esta razón se le llama generalmente *potencial gravitomagnético*. Este potencial implica una diferencia cualitativa con la teoría clásica. Por ejemplo, la fuerza generada por ζ depende de la velocidad de la distribución de masa bajo consideración.

El cuadro 3.1 hace una comparación entre el potencial vector magnético $\mathbf{A}$ y el potencial gravitomagnético ζ, para el caso de un sistema de partículas puntuales. Allí vemos que lo que en electromagnetismo era causado por *corrientes de carga* es aquí causado por *corrientes de masa*, representadas por el momento lineal. Es decir que un chorro de masa moviéndose en el espacio vacío no sólo atrae masas gravitacionalmente hacía sí, sino que también las hace girar a su alrededor, al igual que su análogo magnético.

Recordemos que el campo magnético puede en cierta forma ser visto como un efecto relativista (especial) generado por el campo eléctrico[9]. El campo ζ puede entenderse de una manera muy similar.

En el caso del potencial vector magnético su definición incluye el retardo de la señal, mientras que no ocurre lo mismo en el caso gravitatorio, debido a que el potencial ζ es una aproximación a velocidades bajas. Los efectos de retardo, como ya vimos, sí entran en las correciones del potencial ψ. En el caso electromagnético se utilizó el gauge de Lorentz, y en el gravitatorio las condiciones de coordenadas armónicas.

	Electromagnetismo
Fuente	$\mathbf{J} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$
Potencial eléctrico	$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$
Potencial magnético	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} [\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')]_{ret}$
Campo eléctrico	$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
Campo magnético	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
	Gravitomagnetismo
Fuente	$\mathbf{p} = T^{(1)i0} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$
Potencial gravitatorio	$\phi = -G \sum_i m_i \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert}$
Potencial magnético	$\zeta(\mathbf{r}, t) = -4G \int d^3r' \frac{1}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} \mathbf{p}(\mathbf{r}', t)$
Campo gravitatorio	$\mathcal{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \zeta}{\partial t}$
Campo magnético	$\mathcal{B} = \nabla \times \zeta$

Cuadro 3.1: Comparación Electromagnetismo-Gravitomagnetismo.

Es remarcable que la teoría de la Relatividad General, con toda su complejidad, es a este orden tan similar a la teoría Electromagnética clásica.

Otra cosa importante a tener en cuenta es que durante toda la deducción que nos llevó a la ecuación (3.74) estuvimos trabajando en unidades donde la velocidad de la luz c es igual a 1. Para poder calcular correciones es importante recuperar esos factores de c en las expresiones. Realizaremos ese trabajo en la sección 3.2.

Para poder completar el algoritmo buscado, es necesario ahora calcular el tensor momento energía $T^{\mu\nu}$, fuente de los campos gravitatorios. Comenzaremos viendo cómo aparecen las leyes de conservación de momento y energía en la aproximación post-newtoniana. En general, las leyes de conservación son de la forma $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, o, con mayor detalle

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = -\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} \tag{3.75}$$

El término de orden Mv/r^4 con $\nu = 0$ nos da

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{(0)00} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{(1)i0} = 0 \tag{3.76}$$

dado que todas las Γ's son por lo menos de orden v^2/r. Esto puede ser visto como la ley de conservación de *masa*; no debería sorprendernos encontrar que la masa se conserva en la aproximación post-newtoniana, dado que si la masa se convirtiese en energía a un ritmo apreciable sería de esperar que las partículas del sistema se moviesen a velocidades relativistas, cosa que estamos asumiendo que no ocurre. Más allá de su importancia intrínseca, la ecuación (3.76) es indispensable para nosotros, porque es necesaria para la consistencia de las condiciones de coordenadas armónicas. A partir de (3.50) y (3.52) podemos ver que (3.76) implica

$$0 = \nabla^2 \left(-2 \frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial t} + \frac{\partial g^{(3)}_{0i}}{\partial x^i} \right) = \nabla^2 \left(4 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \zeta \right)$$

Y dado que ψ y ζ se deben anular en el infinito, podemos concluir que

$$4 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \zeta = 0$$

verificando la condición de coordenadas (3.67).

Volviendo a la ecuación (3.75), encontramos que el término $\nu = i$ de orden Mv^2/r^4 nos da

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{(1)0i} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{(2)ij} = -\Gamma^{(2)i}_{00} T^{(0)00}$$

o, utilizando (3.68),

$$\frac{\partial}{\partial t} T^{(1)0i} + \frac{\partial}{\partial x^i} T^{(2)ij} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} T^{(0)00} \tag{3.77}$$

Dado que T^{ij} es el flujo de momento, reconocemos en esta expresión la conservación del momento; nótese que el término a la derecha de la igualdad no es otra cosa que la densidad de fuerza gravitatoria newtoniana, igual a la densidad de masa $T^{(0)00}$ por $-\nabla\phi$.

Todavía necesitamos un modelo con el cual calcular el tensor de momento-energía. El modelo más simple (y útil en nuestro caso) es el de un conjunto de partículas que interaccionan sólo gravitacionalmente, y, quizás, en colisiones localizadas. A partir de la definición del tensor de momento-energía para este caso

$$T^{\mu\nu} = g^{-1/2}(\mathbf{r}, t) \sum_n m_n \frac{dx_n^\mu(t)}{dt} \frac{dx_n^\nu(t)}{dt} \left(\frac{d\tau_n}{dt}\right)^{-1} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \qquad (3.78)$$

donde m_n, x_n^μ y τ_n son la masa, la posición espacio temporal y el tiempo propio de la partícula enésima, y $-g$ es el determinante de $g^{\mu\nu}$. Un cálculo elemental nos da

$$g = 1 + g^{(2)} + g^{(4)} + \ldots$$

donde $g^{(N)}$ es de orden v^N, y en particular

$$g^{(2)} = \eta^{\mu\nu} g^{(2)}_{\mu\nu} = -g^{(2)}_{00} + g^{(2)}_{ii} = -4\phi \qquad (3.79)$$

Para seguir es necesario conocer la manera de convertir la coordenada armónica de tiempo t en el tiempo propio τ medido por un cuerpo en caída libre a velocidad v. Por definición

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = -g_{00} - 2g_{i0}v^i - g_{ij}v^iv^j$$

A orden v^4 esto es

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - [\mathbf{v}^2 + g^{(2)}_{00}] - [g^{(4)}_{00} + 2g^{(3)}_{i0}v^i + g^{(2)}_{ij}v^iv^j]$$

o, utilizando (3.54), (3.57), (3.58) y (3.60):

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 + [2\phi - \mathbf{v}^2] + 2[\phi^2 + \psi - \zeta \cdot \mathbf{v} + \phi\mathbf{v}^2]$$

Los paréntesis rectos encierran términos de orden v^2 y v^4. Usando el desarrollo de Taylor de $\sqrt{1+x}$, encontramos a orden v^4:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \phi - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \frac{1}{8}(2\psi - \mathbf{v}^2)^2 + \phi^2 + \psi - \zeta \cdot \mathbf{v} + \phi\mathbf{v}^2 \qquad (3.80)$$

o

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - L$$

donde

$$L = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 - \phi - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{3}{2}\phi\mathbf{v}^2 + \frac{1}{8}(\mathbf{v}^2)^2 - \psi + \zeta \cdot \mathbf{v}$$

Donde L puede ser visto como el *lagrangeano* de una partícula, y las ecuaciones de movimiento se pueden derivar a partir de las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}$$

Utilizando ahora (3.79) y (3.80) en (3.78) podemos encontrar

$$T^{(0)00} = \sum_n m_n \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \tag{3.81}$$

$$T^{(2)00} = \sum_n m_n (\phi + \frac{1}{2}\mathbf{v}_n^2)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \tag{3.82}$$

$$T^{(1)i0} = \sum_n m_n v_n^i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \tag{3.83}$$

$$T^{(2)ij} = \sum_n m_n v_n^i v_n^j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \tag{3.84}$$

donde $\mathbf{v}_n \equiv d\mathbf{r}_n/dt$. Para imponer las leyes de conservación hay que recordar que

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) = v_n^i \frac{\partial}{\partial x_n^i}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) = -\mathbf{v}_n \cdot \nabla\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))$$

de modo que

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{(0)00} + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{(1)i0} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{(1)0i} + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{(2)ij} = \sum_n m_n \frac{dv_n^i}{dt}\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

Vemos que la ecuación de conservación de la masa (3.76) se satisface automáticamente, mientras que la ecuación (3.77) sólo se satisface si cada partícula obedece las ecuaciones newtonianas de movimiento:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi(\mathbf{r}_n) \tag{3.85}$$

El programa para calcular el movimiento de un conjunto de partículas puntuales gravitantes es por lo tanto:

(A) Resolver el problema newtoniano; eso es, resolver las ecuaciones (3.85) y (3.55) para $\phi(\mathbf{r})$ y $\mathbf{r}_n(t)$. (Nuestros simuladores numéricos ya realizan este paso.)

(B) Utilizar los resultados de (A) y las ecuaciones (3.81)–(3.84) para calcular los términos $T^{(0)00}$, $T^{(2)00}$, $T^{(1)i0}$, $T^{(2)ij}$ del tensor de momento-energía.

(C) Utilizar los resultados de (A) y (B), y las ecuaciones (3.59) y (3.62), para calcular los potenciales post-newtonianos ζ y ψ.

(D) Utilizar los resultados de (A) y (C) y la ecuación (3.74) para calcular las correcciones post-newtonianas a las trayectorias $\mathbf{r}_n(t)$.

(E) Y así...

Con todo esto tendríamos ya esbozado un algoritmo para poder realizar correcciones relativistas a nuestros cálculos de Mecánica Celeste.

3.2. Adaptación al cálculo numérico

En la sección anterior completamos el algoritmo para nuestro problema. De todos modos las ecuaciones siguen luciendo bastante complejas y se pueden realizar ciertas simplificaciones, que resultan imperiosas si se tiene en mente la implementación de un algoritmo númerico.

Pero lo primero que haremos será atacar el problema de los factores de c, que había sido dejado en suspenso en la sección anterior. Para hacer esto tenemos que tener en cuenta que cada término t en los cálculos anteriores es en realidad un ct, y que por ende cada derivada temporal agrega un factor $1/c$. En particular cada término de velocidad v es en realidad un término v/c.

Con esa idea podemos ir agregando factores de c a casi todas las ecuaciones precedentes. Existen algunas ambigüedades en las definiciones de los potenciales ψ y ζ que derivan de ambiguedades posibles en la definición de el tensor de momento–energía $T_{\mu\nu}$. Para este trabajo vamos a considerar que dicho tensor es de la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} m & \mathbf{p}/c \\ \mathbf{p}/c & T_{ij}/c^2 \end{pmatrix}$$

donde m es la masa del sistema, $\mathbf{p}$ su momento y T_{ij} el tensor de tensiones tridimensional (donde la presión viene dada por los términos de la diagonal y los esfuerzos de corte por el resto de los términos).

De este modo los potenciales ψ y ζ quedan entonces redefinidos, modificando las ecuaciones (3.59) y (3.62) para el caso de un sistema de partículas

$$\zeta^i = -\frac{4}{c} G \sum_n \frac{m_n v_n^i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\partial^2\phi(\mathbf{r}',t)}{\partial t^2}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \right. \\ & \left. -G\sum_n m_n \frac{\phi(\mathbf{r}_n) + \frac{1}{2}v_n^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - G\sum_n m_n \frac{v_n^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] \end{aligned}$$

Lo que resta hacer ahora es analizar dimensionalmente la ecuación (3.74), agregando factores de c hasta asegurarse de que todos los términos de la ecuación tienen dimensiones de aceleración. Realizando tal análisis se llega a una ecuación de movimiento modificada con factores de la velocidad de la luz

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla(\phi + 2\frac{\phi^2}{c^2} + \psi) - \frac{1}{c}\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\nabla \times \zeta) + \\ &\quad + \frac{3}{c^2}\mathbf{v}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{4}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\nabla\phi \end{aligned} \tag{3.86}$$

Una vez que tenemos esta ecuación se hace necesario, para ahorrar tiempo de cálculo, desarrollarla en función de las posiciones, velocidades y aceleraciones de las partículas. Al final obtendremos una ecuación que relacione la aceleración de cada partícula i con su estado actual y con el estado actual de las otras partículas. Realizaremos éstos cálculo término a término. En lo que sigue definiremos $\mu_j = Gm_j$, $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ij}$, $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ y $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}$.

(1) El primer término no es otra cosa que el término clásico de Newton.

$$-\nabla\phi = -\sum_{j\neq i}\frac{\mu_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

(2)

$$\begin{aligned}-\frac{2}{c^2}\nabla\phi^2 &= -\frac{4}{c^2}\phi\nabla\phi \\ &= \frac{4}{c^2}\sum_{k\neq i}\frac{\mu_k}{r_{ik}}\sum_{j\neq i}\frac{\mu_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\end{aligned}$$

(3) El siguiente término agrega las correcciones del campo escalar ψ, que incluye, según se desprende de la ecuación (3.86), correcciones al potencial gravitatorio clásico que surgen porque la energía (tanto cinética como potencial) de un sistema de partículas puede ser interpretada como una masa, y también correciones por el tiempo de retardo de la señal gravitatoria.

Se presentan varios inconveniente con la ecuación (3.86) cuando intentamos evaluar la integral que contiene. Como ya vimos en la sección 3.1, éste término surge debido al retardo de la señal gravitatoria, que no es instantánea como en la teoría clásica, sino que viaja a la velocidad de la luz c.

Afortunadamente existe un método comprobado para tratar con esta clase de problemas, que aparecen naturalmente en la electrodinámica.

Siguiendo entonces a Griffiths[9] vamos a reescribir la ecuación (3.62) utilizando potenciales retardados, al estilo Lienard–Wiechert.

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi_1(\mathbf{r}',t_r) + \psi_2(\mathbf{r}',t) \tag{3.87}$$

con

$$\begin{aligned}
\psi_1(\mathbf{r}_i,t) &= -\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[GT^{(0)00}(\mathbf{r}',t_r) - GT^{(0)00}(\mathbf{r}',t)\right] \\
&= \sum_j \frac{\mu_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j(t_r)|}\frac{1}{1-\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}} - \sum_j \frac{\mu_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j(t)|}
\end{aligned}$$

donde el término $1/(1-\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v})$ se debe al cambio de variable de las deltas de Dirac, y $t_r = t - |\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|/c$, como se ve en los cursos de Teoría Electromagnética[9].

$$\begin{aligned}
\psi_2(\mathbf{r}_i,t) &= -\frac{1}{c^2}\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[GT^{(2)00}(\mathbf{r}',t) + GT^{(2)ii}(\mathbf{r}',t)\right] \\
&= -\frac{1}{c^2}\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left[\sum_j \mu_j \frac{\phi(\mathbf{r}')+\frac{1}{2}\mathbf{v}'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j(t)) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_j \mu_j \frac{\mathbf{v}'^i\mathbf{v}'^i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_j(t))\right] \\
&= \frac{1}{c^2}\sum_j \frac{\mu_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j(t)|}\sum_{k\neq j}\frac{\mu_k}{|\mathbf{r}_j(t)-\mathbf{r}_k(t)|} - \\
&\quad -\frac{3}{2c^2}\sum_j \mu_j \frac{\mathbf{v}_j(t)^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j(t)|}
\end{aligned}$$

Hay que remarcar que en ψ_2 no hay correcciones por retardo, ya que éstas serían de un orden más alto en las velocidades que el que nos interesa. En resumen, en ψ_1 entrarían las correcciones por el retardo del potencial clásico y en ψ_2 habría correcciones por la energía del campo clásico y por la energía cinética de las partículas.

A partir de aquí sólo hay que recordar algunas igualdades vectoriales, del estilo de (3.90) más adelante, y también algunas propiedades del tiempo retardado, como que

$$\nabla f(\mathbf{r},t_r) = \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t_r}\nabla t_r$$

y también

$$\nabla t_r = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)}{(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|c-(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\cdot\mathbf{v}_j)}$$

para llegar finalmente a

$$\begin{aligned}\nabla(\psi_1+\phi) &= -\sum_j \frac{\mu_j}{\left(1-\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)^3}\times \\ &\times\Bigg[\left(\frac{1}{r_{ij}^2}-\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)\frac{\mathbf{v}_j}{c}- \\ &-\left(1-\frac{\mathbf{v}_j^2}{c^2}+(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot\frac{\mathbf{a}_j}{c^2}\right)\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\Bigg]\end{aligned}$$

y de un modo un tanto menos esotérico se llega a

$$\nabla\psi_2 = -\frac{1}{c^2}\sum_j \mu_j\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\sum_{k\neq j}\frac{\mu_k}{r_{jk}}-\frac{3}{2c^2}\sum_j \mu_j\mathbf{v}_j^2\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}$$

La primera expresión debe ser simplificada al orden que nos interesa. Para eso utilizaremos el desarollo

$$\frac{1}{(1-x)^3}\simeq 1+3x+6x^2$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)^3}\simeq 1+3\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}+6\left(\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)^2$$

Desechando términos superiores queda entonces

$$\begin{aligned}\nabla\psi_1 &= \sum_j \mu_j\Bigg[\frac{1}{r_{ij}^2}\frac{\mathbf{v}_j}{c}-\left(\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)\frac{\mathbf{v}_j}{c}+\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\frac{\mathbf{v}_j^2}{c^2}- \\ &-\left((\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot\frac{\mathbf{a}_j}{c^2}\right)\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\Bigg]+3\sum_j\mu_j\Bigg[\left(\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)\frac{\mathbf{v}_j}{c}- \\ &-\left(\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}+2\left(\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)^2\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\Bigg]\end{aligned} \quad (3.88)$$

al orden buscado.

Esta última ecuación, sin embargo, está evaluada al tiempo retardado, $t_r = t - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|/c$. Utilizando de nuevo que v/c es un parámetro pequeño y que por ende los retardos también lo serán, uno puede aproximar una función f del tiempo retardado mediante la sencilla fórmula

$$f(t_r) = f\left(t - \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{c}\right) = f(t) - \frac{df}{dt}\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}{c} + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dt^2}\frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}{c^2}$$

con la que se puede modificar (3.88), corrigiendo el gradiente de $(\phi + \psi_1)$ y manteniendo siempre los términos al orden en que estamos trabajando, para llegar finalmente a

$$\begin{aligned}\nabla\psi_1 &= \sum_j \mu_j \Bigg[-\frac{3}{2c^2}\frac{\ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}} + \frac{7}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)\frac{\mathbf{v}_j}{c} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}\frac{\mathbf{v}_j^2}{c^2} - \\ &\quad -\frac{1}{2}\left((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\cdot\frac{\mathbf{a}_j}{c^2}\right)\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3} + \frac{19}{2}\left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}}\cdot\frac{\mathbf{v}_j}{c}\right)^2\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{r_{ij}^3}\Bigg]\end{aligned} \tag{3.89}$$

Un comentario interesante que cabe hacer en este punto es que a lo largo de la deducción precedente (y de todo este trabajo) se asumió que la velocidad de propagación de la señal gravitatoria coincide con c, la velocidad de la luz. Asumir tal cosa es consistente con la teoría de la relatividad especial, pero no teóricamente necesario. Es posible que en algún momento se pueda medir la velocidad real de propagación (quizás incluso utilizando datos de mecánica celeste).

(4) Este es el primero de los términos que involucran al potencial vectorial gravitomagnético ζ.

$$\begin{aligned}-\frac{1}{c}\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{4}{c^2}\sum_j \mu_j \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{v}_j}{r_{ij}} \\ &= \frac{4}{c}\sum_j \left(\frac{\mu_j}{r_{ij}}\mathbf{a}_j - \mu_j\left(\mathbf{v}_j\cdot\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}\right)\mathbf{v}_j\right)\end{aligned}$$

(5) Para éste término es necesario utilizar la (monstruosa) igualdad vectorial

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{3.90}$$

al final

$$\frac{\mathbf{v}_i}{c} \times (\nabla \times \zeta) = \frac{4}{c^2} \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}^3} \left(3(\mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j))\mathbf{v}_j + (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\right)$$

(6) Los últimos términos parecen tener que ver con el cambio del potencial clásico debido al movimiento de las partículas (algo así como las derivadas materiales en Mecánica de fluídos).

$$\mathbf{v}_i \frac{3}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{3}{c^2}\mathbf{v}_i \sum_j \frac{\mu_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j$$

(7)

$$\frac{4}{c^2}\mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i \cdot \nabla)\phi = \frac{4}{c^2} \sum_j \mu_j \left(\mathbf{v}_i \cdot \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}\right) \mathbf{v}_i$$

(8)

$$-\frac{\mathbf{v}_i^2}{c^2}\nabla\phi = -\frac{\mathbf{v}_i^2}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{\mu_j}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

De la suma de todos estos términos resulta una ecuación de movimiento relativista, muchísimo más compleja que la clásica.

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_i \;=\; & -\sum_{j \neq i} \frac{\mu_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}\Bigg\{1 - \frac{4}{c^2}\sum_{k \neq i}\frac{\mu_k}{r_{ik}} - \frac{1}{c^2}\sum_{k \neq j}\frac{\mu_j}{r_{ij}} + \frac{\mathbf{v}_i^2}{c^2} + \\
& + \frac{3}{2}\frac{\mathbf{v}_j^2}{c^2} - \frac{4}{c^2}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j - \frac{19}{2c^2}\left[\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{v}_j}{r_{ij}}\right]^2 + \frac{1}{2c^2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j\Bigg\} + \\
& + \frac{1}{c^2}\sum_{j \neq i}\frac{\mu_j}{r_{ij}^3}\Big\{[(4\mathbf{v}_i + 3\mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]\mathbf{v}_i + \\
& + [(3\mathbf{v}_i + \frac{7}{2}\mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)]\mathbf{v}_j\Big\} + \frac{5}{2c^2}\sum_{j \neq i}\frac{\mu_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

3.3. Comparación con fórmulas utilizadas en la literatura

Las correcciones relativistas son poco comunes en la literatura astronómica, en parte debido a que algoritmos como el presentado son numéricamente muy costosos. En el momento actual, sin embargo, la tecnología permite realizar simulaciones razonables corregidas por relatividad, que quizás podrían arrojar resultados interesantes. Es así como en los últimos años se han visto algúnos métodos.

Una primera aproximación es la dada por Quinnn et al. [18] y utilizada en casi la totalidad de los casos en que se encuentran correcciones. En esta aproximación sólo se tienen en cuenta correcciones en las que el Sol juega un papel, lo que permite predecir, por ejemplo, la precesión del perihelio de Mercurio. Las correcciones serían del tipo

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3c^2}\left[\left(\frac{4GM}{r} - \mathbf{v}^2\right)\mathbf{r} + 4(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})\mathbf{v}\right] \tag{3.92}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector desde el Sol al planeta y $\mathbf{v}$ el el vector velocidad del objeto relativa al Sol. En esta aproximación la aceleración ya deja de ser puramente radial. Esta expresión se la puede ver simplificada aún más para casos de bajas excentricidades, pero en tales casos su aplicación es muy restringida y tiene en todo caso un interés educativo.

El algoritmo de Quinn et al. podría no ser suficiente para algunas aplicaciones y determinar sus límites sería uno de los principales objetivos de nuestro algoritmo.

Por otro lado, en el *Explanatory Suplement* del *Astronomical Almanac*[6] se puede encontrar[2] una expresión más compleja y muy similar a la aquí presentada

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_i \quad = \quad & -\sum_{j\neq i}\frac{\mu_j(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)}{r_{ij}^3}\Bigg[1-\frac{4}{c^2}\sum_{k\neq i}\frac{\mu_k}{r_{ik}}-\frac{1}{c^2}\sum_{k\neq j}\frac{\mu_j}{r_{ij}}+\frac{\mathbf{v}_i^2}{c^2}+ \\
& +\frac{1}{2}\frac{\mathbf{v}_j^2}{c^2}-\frac{4}{c^2}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j-\frac{3}{c^2}\left(\frac{(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot\mathbf{v}_j}{r_{ij}}\right)^2+\frac{1}{c^2}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot\ddot{\mathbf{r}}_j\Bigg]+ \\
& +\frac{1}{c^2}\sum_{j\neq i}\frac{\mu_j}{r_{ij}^3}\left[(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\cdot(4\mathbf{v}_i-3\mathbf{v}_j)\right](\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j)+ \\
& +\frac{7}{2c^2}\sum_{j\neq i}\frac{\mu_j\ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Según las referencias el algoritmo proviene de un libro de Will[30]. Si en este algoritmo (o en el de la ecuación (3.91)) se desprecian los efectos relativistas de todos los objetos con excepción del Sol, se recupera fácilmente el algoritmo simplificado de Quinn (3.92).

Las diferencias de (3.93) con nuestro algoritmo (3.91) podrían ser explicadas por una elección de *gauge*[23].

En la sección 3.1 tuvimos que hacer una elección de sistema de coordenadas armónico para poder avanzar en los cálculos. Tal elección se expresaba en una *condición de coordenadas armónicas* (3.30)

[2] Y nosotros lo hicimos en etapas ya avanzadas del presente trabajo.

$$\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

que al orden que nos interesa es equivalente, como ya vimos, a las ecuaciones (3.32) y (3.33)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{00,0} - \overset{(3)}{g}_{0i,i} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{ii,0} &= 0 \\
\frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{00,i} - \overset{(3)}{g}_{ij,j} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{jj,i} &= 0
\end{aligned}$$

que terminan siendo resumidas en la condición (3.67)

$$4\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\zeta = 0$$

Will, sin embargo, utiliza el que se llama el gauge estándar post-newtoniano (*standard Post-Newtonian gauge*), que al orden que nos interesa se reduce a

$$\begin{aligned}
-\overset{(3)}{g}_{0i,i} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{ii,0} &= 0 \\
\frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{00,i} - \overset{(3)}{g}_{ij,j} + \frac{1}{2}\overset{(2)}{g}_{jj,i} &= 0
\end{aligned}$$

Cada gauge define una clase de coordenadas distinta. Las coordenadas estándar Post-newtoniananas difieren de las armónicas utilizadas en éste trabajo únicamente en una elección distinta de la variable temporal.[23]

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo se presentarán algunas aplicaciones del algoritmo post-newtoniano. Se tratará exhaustivamente un ejemplo que no requiere la utilización de un programa informático, y se hará un paneo general de posibles aplicaciones numéricas.

4.1. Precesión del perihelio

Para empezar vamos a ver como el formalismo post-newtoniano desarrollado anteriormente puede ser utilizado para calcular la precesión de las órbitas planetarias en el Sistema Solar, tomando en cuenta a los otros planetas, la rotación solar, el achatamiento solar, etc. Nuevamente nos apoyaremos fuertemente en Weinberg[28].

El potencial $\phi + \psi$ que determina g_{00} está absolutamente dominado por la parte esféricamente simétrica de la contribución solar, $-GM_\odot/r$, de modo que conviene escribir

$$\phi + \psi = -\frac{GM_\odot}{r} + \varepsilon(\mathbf{r}, t) \tag{4.1}$$

con ε incluyendo no sólo los potenciales newtonianos de los otros planetas sino también cualquier cuadripolo o términos de mayor orden en la contribución solar a $\phi + \psi$. La ecuación de movimiento de una partícula puntual ahora es

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM_\odot \mathbf{r}}{r^3} + \eta + O(v^6) \tag{4.2}$$

siendo η una perturbación pequeña:

$$\begin{aligned}
\eta &= -\nabla(\varepsilon + 2\phi^2) - \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) \\
&\quad +3\mathbf{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} + 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\phi - \mathbf{v}^2 \nabla \phi
\end{aligned} \tag{4.3}$$

La técnica más conveniente para calcular la precesión de los perihelios es analizar la derivada temporal del *vector de Runge-Lenz*

$$\mathbf{A} = -M_\odot G \frac{\mathbf{r}}{r} + (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \tag{4.4}$$

Aquí $r \equiv |\mathbf{r}|$, $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{r}/dt$, y $\mathbf{h}$ es el momento angular orbital por unidad de masa:

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

Si no existiese la perturbación η en la ecuación (4.2) la órbita sería una elipse, descrita por las fórmulas ya familiares

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)} \tag{4.5}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sqrt{LM_\odot G}}{r^2} \tag{4.6}$$

$$\frac{dr}{dt} = e\sqrt{\frac{M_\odot G}{L}}\sin(\varphi - \varphi_0) \tag{4.7}$$

donde e es la excentricidad y L el *semilatus rectum*. Estamos tomando la órbita en el plano $\theta = \phi/2$, con el perihelio en un ángulo azimutal ϕ_0. h va a ser entonces un vector constante perpendicular a la órbita y con magnitud

$$|h| = \sqrt{LM_\odot G} \tag{4.8}$$

y $\mathbf{A}$ será un vector constante apuntando al perihelio, con magnitud

$$|\mathbf{A}| = eM_\odot G \tag{4.9}$$

Por ende, la precesión del perihelio $d\varphi_0/dt$ causada por cualquier perturbación es exactamente la componente del cambio $d\hat{\mathbf{A}}/dt$ en el vector unidad $\hat{\mathbf{A}} \equiv \mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ a lo largo de una dirección perpendicular tanto a $\mathbf{A}$ como a h, es decir

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = (\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{A}}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = (\mathbf{h} \times \mathbf{A}) \cdot \frac{\frac{d\mathbf{A}}{dt}}{|\mathbf{h}|\mathbf{A}^2} \tag{4.10}$$

(Si $d\varphi_0/dt$ es positiva la precesión será en el mismo sentido que la dirección de movimiento del planeta.) Un cálculo directo a partir de (4.4) y utilizando (4.2) nos da para el cambio en $\mathbf{A}$ debido a la perturbación η el valor

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \eta \times \mathbf{h} + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \eta) \tag{4.11}$$

Nótese que $d\mathbf{A}/dt$, y por ende $d\varphi_0/dt$ son lineales en η, de modo que $d\varphi_0/dt$ se calcula correctamente como una suma de precesiones producidas por cada término en η.

El término más importante de η es la parte de $-\nabla\varepsilon$ que surge de los potenciales newtonianos de los otros planetas. No vamos a calcular éste término aquí, los libros de astronomía nos dicen que produce una precesión $d\varphi_0/dt$, que para Mercurio es de algo así como $532''$ por siglo. El término segundo en importancia se obtiene a partir de las correcciones relativistas en la ecuación (4.3), haciendo que ϕ y ζ tengan los valores que tendrían para un Sol esférico y estático:

$$\phi_\odot = -\frac{GM_\odot}{r} \qquad \zeta_\odot = 0$$

Entonces (4.3) nos da

$$\eta = -2\nabla\phi_\odot^2 + 4\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi_\odot - \mathbf{v}^2\nabla\phi_\odot \tag{4.12}$$

Utilizando (4.11)–(4.12) y (4.5)–(4.9) en (4.10) nos da la precesión como

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0}{dt} &= 8M_\odot GhL^{-3}[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^3\sin^2(\varphi-\varphi_0) - M_\odot Ge^{-1}hL^{-3} \\ &\quad \times\{7[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2 + 4[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^3 \\ &\quad +[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^4\}cos(\varphi-\varphi_0)\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dado que φ_0 cambia lentamente, el cambio en φ_0 en una revolución puede ser determinado integrando $d\varphi_0/dt$ a lo largo de un período, manteniendo a φ_0 fijo en el integrando y utilizando las fórmulas keplerianas (4.5)–(4.9) para $d\varphi/dt$. Todo esto nos termina dando para la precesión por revolución

$$\Delta\varphi_0 = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi_0}{dt}\frac{dt}{d\varphi}d\varphi = \frac{L^2}{h}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi_0}{dt}[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^{-2}d\varphi \tag{4.14}$$

La mayor parte de los términos se anulan con la integración angular, y nos terminamos quedando con

$$\Delta\varphi_0 = 6\pi\frac{M_\odot G}{L} \tag{4.15}$$

que coincide con el resultado estándar de Einstein, al que se llega generalmente por otros caminos [24][28].

Como ejemplo de otro término pequeño que colabora con la precesión se puede calcular el efecto del campo ζ producido por la rotación solar. Se puede calcular el campo ζ generado por una distribución esférica de masa que rota con una frecuencia angular $\omega(r)$. La densidad de momento viene dada por

$$T^{(1)i0}(\mathbf{r}', t) = T^{(0)00}(r')[\omega(r') \times \mathbf{r}']_i \tag{4.16}$$

La ecuación (3.59) nos da el campo ζ como

$$\zeta(\mathbf{r}) = -4G \int \frac{[\omega(r') \times \mathbf{r}']}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} T^{(0)00}(r') d^4x'$$

La integral de ángulo sólido es ahora

$$\int \frac{d\Omega \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \left(\frac{4\pi}{3r'}\mathbf{r}\right) \qquad r' > r$$

Por lo tanto el campo afuera de una esfera puede ser escrito como

$$\zeta(\mathbf{r}) = \frac{16\pi G}{3r^3} \left[\mathbf{r} \times \int \omega(r') T^{(0)00}(r') r'^4 dr'\right] \tag{4.17}$$

Esta integral puede ser expresada en términos del momento angular, dado por la ecuación

$$J_k^{(1)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} J_{ij}^{(1)} = \int d^3x \varepsilon_{ijk} x^i T^{(1)j0}$$

entonces podemos escribir, usando (4.16)

$$\begin{aligned} J &= \int (\mathbf{r}' \times [\omega \times \mathbf{r}']) T^{(0)00}(r') d^4x' \\ &= \int [r'^2 \omega(r') - \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \omega(r'))] T^{(0)00}(r') d^4x' \\ &= \frac{8\pi}{3} \int \omega(r') T^{(0)00}(r') r'^4 dr' \end{aligned}$$

Entonces(4.17) nos da, afuera de nuestro Sol esférico,

$$\zeta = \frac{2G}{r^3}(\mathbf{r} \times \mathbf{J}_\odot) \tag{4.18}$$

Esto contribuye a la aceleración $d\mathbf{v}/dt$ en una cantidad dada por (4.3) como

$$\eta = \mathbf{v} \times (\nabla \times \zeta) = 6G\mathbf{h}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_\odot) r^{-5} + 2G(\mathbf{v} \times \mathbf{J}_\odot) r^{-3} \tag{4.19}$$

y (4.11) nos dice que esto causa que $\mathbf{A}$ cambie en una cantidad

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -6g\mathbf{h}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}_\odot) r^{-5} - 2G(\mathbf{v} \times \mathbf{J}_\odot)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) r^{-3} - 2g\mathbf{v}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{J}_\odot) r^{-3} \tag{4.20}$$

Por simplicidad vamos a considerar que el eje de rotación del Sol es perpendicular al plano de la órbita del planeta (aproximación más válida para planetas que para cuerpos menores), de modo que $\mathbf{J}_\odot$ será paralelo a $\mathbf{h}$. Utilizando (4.20) y (4.5)–(4.9) en (4.10) nos da para la precesión

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= \frac{2J_\odot h^2}{M_\odot L^4 e}\{-[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^2 s\sin^2(\varphi-\varphi_0) \\ &\quad -[1+e\cos(\varphi-\varphi_0)]^3[e+\cos(\varphi-\varphi_0)]\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

y (4.14) nos da entonces para la precesión por revolución

$$\Delta\varphi_0 = \frac{-8\pi J_\odot h}{M_\odot L^2} \tag{4.22}$$

Generalmente se le da al Sol un momento angular $J_\odot \simeq 1{,}7\times 10^{48}$ $g\ cm^2$ s^{-1}, y su masa es $M_\odot = 1{,}99\times 10^{33}$ g, de modo que en nuestras unidades naturales con 1 $s = 3\times 10^{10}$ cm tenemos

$$\frac{J_\odot}{M_\odot} = 0{,}28\ km$$

Además la órbita de Mercurio tiene $L = 55{,}5\times 10^6$ km y $h = 9{,}03\times 10^3$ km, de modo que el campo ζ cointribuiría a la precesión del perihelio de Mercurio con una cantidad

$$\Delta\varphi \simeq -2{,}06\times 10^{-11} \quad radianes/revolucion$$

o, en unidades más convencionales

$$\Delta\varphi_0 \simeq -17{,}6\times 10^{-4} \quad segundos\ de\ arco/siglo$$

esta precesión es demasiado pequeña como para ser medida.

Quizás es bueno remarcar que la precesión total debe ser calculada sumando el término newtoniano de $532''$ por siglo más el término debido a Einstein (4.15), más el término dependiente de ζ (4.22), más un término newtoniano debido a cualquier achatamiento del Sol, más un término que surge de la contribución de la rotación solar a la parte anisotrópica de ψ, más términos que surgen a partir de correcciones post-newtonianas a las perturbaciones causadas por otros planetas. Sólo los términos newtonianos y el de Einstein son lo suficientemente grandes como para ser medidos.

4.2. Algunos órdenes de magnitud

La idea detrás de la teoría post-newtoniana es emplear el hecho de que en los sistemas solares las velocidades (de los cuerpos astrofísicos) son bajas y los campos gravitatorios son débiles. La teoría post-newtoniana es entonces una aproximación de movimientos lentos y campos débiles (*slow motion, weak field approximation*). El parámetro de desarrollo no es otra cosa que

$$\beta = \frac{v}{c}$$

y tenemos que en el sistema solar

$$\frac{\phi}{c^2} \sim \frac{p}{\rho c^2} \sim \Pi \sim \left(\frac{v}{c}\right)^2 < 10^{-5}$$

donde ϕ es la energía potencial, p es la presión y Π la densidad de energía interna específica (energía interna / energía de reposo).

Por ejemplo $\phi/c^2 \simeq GM/c^2$, entonces para la Tierra

$$\frac{GM_\oplus}{c^2 R_\oplus} \simeq 6{,}9 \times 10^{-10}$$

y para el Sol

$$\frac{GM_\odot}{c^2 R_\odot} \simeq 2{,}1 \times 10^{-6}$$

Ahora bien, para la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol tenemos

$$\left(\frac{v_\oplus}{c}\right)^2 \simeq \left(\frac{30}{300000}\right)^2 \simeq 10^{-8}$$

para el caso de estrellas binarias la relación es incluso menor, dado que la velocidad relativa característica de los sistemas binarios es de alrededor de 3 a 5 Km/s. El cociente puede incrementarse apreciablemente en el caso de binarias próximas.

Para el sistema extrasolar 51 Pegasi (HD217014), el primero en ser descubierto alrededor de una estrella similar al Sol

$$a = 0{,}052\, UA \simeq 8 \times 10^6\ Km$$

$$T = 0{,}01158\ años = 365437\ s$$

entonces

$$\left(\frac{v_{51Peg}}{c}\right)^2 \simeq \left(\frac{135}{300000}\right)^2 \simeq 2 \times 10^{-7}$$

y podemos encontrar valores similares para otros sistemas extrasolares.

En cuanto a la energía interna de las partículas, la geofísica nos dice por ejemplo que en el centro de la Tierra

$$\begin{aligned} T_c^{\oplus} &\sim 6000^oC \\ \rho_c &\sim 16\ g\ cm^{-3} \\ p_c &\sim 4\times 10^{12}\ dyn\ cm^{-2} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left.\frac{p}{\rho c^2}\right|_{\oplus} \leq \left.\frac{p_c}{\rho_c c^2}\right|_{\oplus} \sim 3\times 10^{-10}$$

y también ($\gamma = c_p/c_V$ es la razón de los calores específicos)

$$\Pi_{\oplus} \leq \left.\frac{1}{1-\gamma}\frac{p_c}{\rho_c c^2}\right|_{\oplus} \sim 10^{-9}$$

y así.

Esta serie de ejemplos muestran claramente la validez de la aproximación post-newtoniana en los sistemas de interés de este trabajo.

4.3. Aplicaciones numéricas

Ahora veremos un cierto número de posibles aplicaciones que tendría el algoritmo computacional finalizado. En los apéndices se transcribirán algunas no muy eficientes implementaciones del mismo, que están planeadas para atacar este tipo de problemas.

4.3.1. Evolución a largo plazo del Sistema Solar

Los efectos debidos a Relatividad General, si bien débiles, pueden llegar a ser insoslayables con el correr de los millones de años. En un paper reciente[27] Varadi et al. comparan los cambios en las órbitas planetarias utilizando una pequeña corrección relativista, que si bien sólo tiene en cuenta términos de bajo orden debidos al Sol, lleva a resultados interesantes en varios casos, por ejemplo en la variación de la excentricidad de la órbita terrestre en tan sólo tres millones de años.

Sería interesante probar nuestro algoritmo, que posee un mayor grado de precisión, y en el que como ya vimos entran también efectos relativistas debidos a los planetas o a la velocidad finita de transmisión de la información gravitatoria.

Una primera prueba pues, para testear los resultados de este trabajo, sería la comparación de simulaciones numéricas a largo plazo del Sistema Solar (en el orden de los cientos de millones de años), utilizando algoritmos clásicos y relativistas, tanto los nuestros como las versiones simplificadas que utiliza en general la comunidad astronómica[18].

Los primeros efectos a buscar estarían en el sistema solar exterior, donde debido a su compleja dinámica de resonancias (por ejemplo la 5:2 entre Júpiter y Saturno, la 3:1 entre Urano y Saturno 0 la 2:1 entre Neptuno y Urano) se vuelve probable alguna relevancia de las correcciones relativistas. Un punto de comienzo sería la detección de cambios en las frecuencias características de las resonancias.

Posteriormente se podrían realizar los mucho más costosos cálculos utilizando todos los planetas del Sistema Solar. Por ejemplo, una posibilidad es el estudio de la dinámica rotacional. En un célebre paper[16] de Laskar se asevera, por ejemplo, que la evolución de la oblicuidad de Marte se vuelve caótica si se agregan términos de orígen relativista, siendo regular en el caso clásico.

Este tipo de simulaciones comparativas se está llevando a cabo actualmente, al momento de escribir este trabajo.

4.3.2. Cuerpos menores

Existen también un cierto número de efectos que podrían ser observables en la población de cuerpos menores del Sistema Solar. Estos serían un segundo objetivo natural de simulaciones comparativas entre los modelos clásico y relativistas[22].

En primer lugar están los objetos que, como Icarus, presentan altas excentricidades y pequeños semiejes. Esta población es particularmente interesante, dado que abundan los objetos con esas características. A setiembre del 2005 se conocen tres asteroides con un afelio menor a una Unidad Astronómica, 251 con semieje menor que esa distancia y 84 con perihelio menor al de Mercurio.

Sería importante también estudiar a los objetos cercanos a la Tierra (NEOs), y su estabilidad. Simulaciones numéricas clásicas muestran que existe una población de estos objetos que cae en resonancias en órbitas de alta excentricidad que los llevarían a colisiones con el Sol. Quizás la teoría de Einstein afecte a estos mecanismos.

Otro potencial objetivo son los cometas *sungrazers*, cometas que en general se asumen casi parabólicos y cuyas órbitas pasan muy cerca del Sol, tan así que de hecho varios no sobreviven el encuentro. Se han encontrado peculiaridades en la distribución de estos cometas (por ejemplo la mayoría tienen una inclinación cercana a los 144^{o}), que han tratado de ser explicadas por varios mecanismos. Sería interesante determinar el efecto gradual relativista que estos objetos pueden haber recibido a lo largo de la historia del Sistema Solar.

4.3.3. Planetas extrasolares

En la actualidad - finales de septiembre de 2005 - se conocen 140 sistemas con en total 168 planetas orbitando alrededor de otras estrellas de la secuencia principal. Debido en parte a un bias observacional, se ha encontrado que la mayor parte de estos planetas tienen órbitas muy cercanas a su sol, en general con altas excentricidades, y además son extremadamente masivos, con masas del orden de varias veces la de Júpiter.

Cualquiera de estas llamativas características hacen que las correcciones relativistas adquieran una relevancia mayor en el estudio de estos sistemas que la que podría llegar a tener aplicadas a nuestro propio Sistema Solar.

Existen además estudios numéricos (por ejemplo [12]) que han demostrado que varias de las órbitas conocidas de planetas extrasolares serían inestables en un plazo de algunos miles de años, un tiempo muy corto a escala astronómica. Una posible explicación para este fenómeno podría venir dada, además de por una mala determinación de los elementos orbitales, por la existencia de otros planetas a distancias mayores de la estrella, que servirían como “estabilizadores”. Sería interesante ver cómo afectan a estos resultados las correcciones relativistas.

El estudio de los planetas extrasolares es uno de los temas en los que más se publica actualmente en Astronomía, y está estrechamente ligado al desarrollo de la nueva ciencia de la Exobiología. Es esperable que el conocimiento en este campo se incremente exponencialmente en los próximos años, dado el nuevo intrumental planeado y el interés generado.

Con esto en mente uno de los objetivos principales del algoritmo encontrado será su aplicación al estudio de los sistemas extrasolares conocidos, para ver qué fenómenos no newtonianos, si es que existen, aparecen con el correr de las simulaciones.

4.3.4. Binarias próximas

Otra posible aplicación del algoritmo es el estudio de sistemas estelares binarios con masas grandes o semiejes muy chicos[10][14][21] (lo que implica velocidades altas, por la tercera ley de Kepler). Nuestro algoritmo sería capaz de obtener buenos resultados siempre que la velocidad de los objetos no se haga comparable a la de la luz, y que los objetos no estén tan próximos qeu haya que agregar correcciones por las fuerzas de marea.

Un dato a tener en cuenta es que las correcciones relativistas dependen de las masas de los objetos y que en principio sería posible utilizarlas para, junto con los datos clásicos, encontrar las masas individuales de dos estrellas binarias. Esto se ha hecho anteriormente, pero con cálculos a un orden más bajo que el aquí presentado. Habría que investigar un poco más para saber si nuestros resultados tendrían una utilidad clara en estos casos.

Otra posibilidad interesante sería estudiar sistemas de Púlsares binarios, que tienen gran relevancia en la investigación actual en Astrofísica[25]. El premio nobel en física de 1993 fue entregado a Hulse y Taylor, por el decubrimiento del sistema de Púlsares binario PSR $1913 + 16$, que permitió encontrar una nueva corroboración de la teoría de Einstein. De nuevo, estos sistemas entrarían dentro de los descriptos por el algoritmo de nuestro trabajo siempre y cuando las velocidades típicas de los objetos no sean demasiado cercanas a la de la luz. En el caso de PSR $1913+16$, las velocidades máximas no superan los 300 Km/s.

Otra aplicación imaginable para el caso de las binarias próximas, o también de los planetas extrasolares, es intentar la determinación de la velocidad de propagación del campo gravitatorio. Como ya mencionamos en la sección 3.2, a lo largo de todo este trabajo hemos estado asumiendo que dicha velocidad es igual a la de la luz, pero esto nunca ha sido medido hasta el momento. En nuestro algoritmo nosotros tenemos completamente identificado el término en las ecuaciones debido al retardo de la señal, dato que unido a algún conjunto de observaciones astronómicas de muy alta calidad podría ser útil para determinar la velocidad de la misma.

Apéndice A

Implementación Fortran

En este apéndice se transcribirá una versión Fortran 77 del algoritmo presentado. Tabaré Gallardo es el principal responsable de la implementación, luego de algún intento frustrado. Agradezco mucho su ayuda.

```
C DEFINICION DE LA FUERZA (ACELERACION)
C CASO RELATIVISTA

      SUBROUTINE FORCE(XCH,VCH,TM,F)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION XCH(60),VCH(60),F(60),SAM(20),R(20,20),R3(20,20)
      DIMENSION X(20,3),V(20,3),FU(20,3),A(20,3)
      COMMON/NYG/NPLA,NPARTI,GMO,DPI
      COMMON/MASAS/SAM
      COMMON/PARAMETROS/C2
      NBOD=NPLA+NPARTI
      NBOD1=NBOD+1
C PASO DE CHORIZO A MATRIZ
      DO I=1,NBOD1
        J=(I-1)*3
        X(I,1)=XCH(J+1)
        X(I,2)=XCH(J+2)
        X(I,3)=XCH(J+3)
        V(I,1)=VCH(J+1)
        V(I,2)=VCH(J+2)
        V(I,3)=VCH(J+3)
      ENDDO
C CALCULO DE ANTEMANO LAS DISTANCIAS
      DO  I=1,NBOD1
C CERO LAS FUERZAS
        FU(I,1)=0.D0
        FU(I,2)=0.D0
        FU(I,3)=0.D0
        DO  J=1,I-1
          R(I,J) =          (X(I,1)-X(J,1))**2
          R(I,J) = R(I,J) + (X(I,2)-X(J,2))**2
          R(I,J) = R(I,J) + (X(I,3)-X(J,3))**2
          R(I,J)=DSQRT(R(I,J))
```

```
          R(J,I)=R(I,J)
          R3(I,J)=R(I,J)**3
          R3(J,I)=R(J,I)**3
        ENDDO
      ENDDO
C
C CALCULO LAS ACELERACIONES CLASICAS, PARA UTILIZAR EN LA CORRECCION
C
      DO  I=1,NBOD1
        A(I,1)=0.D0
        A(I,2)=0.D0
        A(I,3)=0.D0
        DO 33 J=1,NBOD1
          IF(J.EQ.I) GOTO 33
          A(I,1)=A(I,1)+SAM(J)*(X(J,1)-X(I,1))/R3(I,J)
          A(I,2)=A(I,2)+SAM(J)*(X(J,2)-X(I,2))/R3(I,J)
          A(I,3)=A(I,3)+SAM(J)*(X(J,3)-X(I,3))/R3(I,J)
  33    CONTINUE
      ENDDO


C AHORA PUEDO APLICAR LA GRAN SUMA
C
      DO 72 I=1,NBOD1
C
         DO 80 J=1,NBOD1
c         AUX = 1.D0
            IF (J.EQ.I) THEN
              goto 80
            ENDIF
C
            DO 82 K=1,NBOD1
               sum1=0.d0
               IF (K.EQ.I) THEN
                 goto 82
               ENDIF
               sum1=sum1+SAM(K)/R(I,K)
  82        CONTINUE
               sum1=-(4.D0/C2)*sum1
C
            DO 96 K=1,NBOD1
               sum2=0.d0
               IF (K.EQ.J) THEN
                 goto 96
               ENDIF
               sum2=sum2+SAM(K)/R(J,K)
  96      CONTINUE
               sum2=-(1.D0/C2)*sum2
C
        AU01 = V(I,1)*V(I,1) + V(I,2)*V(I,2) + V(I,3)*V(I,3)
        sum3=(1.D0/C2)*AU01
        AU01 = V(J,1)*V(J,1) + V(J,2)*V(J,2) + V(J,3)*V(J,3)
        sum4=(2.D0/C2)*AU01
        AU01 = V(I,1)*V(J,1) + V(I,2)*V(J,2) + V(I,3)*V(J,3)
```

```
        sum5=-(4.D0/C2)*AU01

        AU01 =         (X(I,1)-X(J,1))*V(J,1)
        AU01 =  AU01 + (X(I,2)-X(J,2))*V(J,2)
        AU01 =  AU01 + (X(I,3)-X(J,3))*V(J,3)
        sum6= - 3.D0/(2.D0*C2*(R(I,J)**2))*AU01**2

        AU01 =        (X(J,1)-X(I,1))*A(J,1)
        AU01 = AU01 + (X(J,2)-X(I,2))*A(J,2)
        AU01 = AU01 + (X(J,3)-X(I,3))*A(J,3)
        sum7=(1.D0/(2.D0*C2))*AU01
C

       sumt=1.d0+sum1+sum2+sum3+sum4+sum5+sum6+sum7

        AUXIJ1=SAM(J)*(X(J,1)-X(I,1))/R3(I,J)*sumt
        AUXIJ2=SAM(J)*(X(J,2)-X(I,2))/R3(I,J)*sumt
        AUXIJ3=SAM(J)*(X(J,3)-X(I,3))/R3(I,J)*sumt


C
        AUX =       (X(I,1)-X(J,1))*(4.D0*V(I,1)-3.D0*V(J,1))
        AUX = AUX + (X(I,2)-X(J,2))*(4.D0*V(I,2)-3.D0*V(J,2))
        AUX = AUX + (X(I,3)-X(J,3))*(4.D0*V(I,3)-3.D0*V(J,3))

         AUXIJ1=AUXIJ1+AUX*(V(I,1)-V(J,1))*sam(j)/r3(i,j)/c2
         AUXIJ2=AUXIJ2+AUX*(V(I,2)-V(J,2))*sam(j)/r3(i,j)/c2
         AUXIJ3=AUXIJ3+AUX*(V(I,3)-V(J,3))*sam(j)/r3(i,j)/c2


C
            AUXIJ1=AUXIJ1+(7.D0/(2.D0*C2))*(SAM(J)*A(J,1))/R(I,J)
            AUXIJ2=AUXIJ2+(7.D0/(2.D0*C2))*(SAM(J)*A(J,2))/R(I,J)
            AUXIJ3=AUXIJ3+(7.D0/(2.D0*C2))*(SAM(J)*A(J,3))/R(I,J)
        FU(I,1)=FU(I,1)+AUXIJ1
        FU(I,2)=FU(I,2)+AUXIJ2
        FU(I,3)=FU(I,3)+AUXIJ3
C LISTO!
  80     CONTINUE
  72     CONTINUE
```

Apéndice B

Implementación C

En este apéndice se transcribirá una versión C tentativa del algoritmo presentado. Como tal no es demasiado eficiente, y se presenta aquí sólo a manera de ejemplo.

Utilizo para la rutina un archivo *header*, donde defino una estructura (clase) *particle*, compuesta por la masa, posiciones, velocidades y aceleraciones, clásicas y corregidas, de las distintas partículas. Defino también algunas constantes:

```
/* Archivo rel.h, header para la rutina de correcciones
relativistas */

#include <stdin.h>
#include <math.h>


double c = 1.0;
double c2 = c * c;
int N = 10;

struct particle{
    double m, x, y, z, vx, vy, vz, ax, ay, az, bx, by, bz;
}
```

El cuerpo del programa es, sin más preámbulos, el siguiente:

```
/* Cálculo de aceleración utilizando correcciones relativistas */


int accel(struct *p, int N) {
    int i, j, k;
    double aux, aux2;
    double **r, **r3;

    // inicializo
```

```
for(i = 0; i < N; i++){
    *r[i] = calloc (N * sizeof(double));
}

for(i = 0;i < N; i++){
    p[i].ax = 0;
    p[i].ay = 0;
    p[i].az = 0;
    p[i].bx = 0;
    p[i].by = 0;
    p[i].bz = 0;

}

// calculo las distancias entre todas las pículas
// y las guardo en la matriz r

for (i = 0; i < N; i++){
    for (j = 0; j < i; j++){
        r[i][j] = (p[j].x - p[i].x) * (p[j].x - p[i].x);
        r[i][j] += (p[j].y - p[i].y) * (p[j].y - p[i].y);
        r[i][j] += (p[j].z - p[i].z) * (p[j].z - p[i].z);
        r[i][j] = sqrt(r[i][j]);
        r3[i][j] = r[i][j] * r[i][j] * r[i][j];
        r[j][i] = r[i][j];
        r3[j][i] = r3[i][j];
    }
}


// calculo la aceleración clásica

for (i = 0; i < N; i++) {
    for (j = 0; j < N; j++){ // tengo que sacar el caso j = i
        if(i != j){
           p[i].ax += p[j].m * (p[j].x - p[i].x) / r3[i][j];
           p[i].ay += p[j].m * (p[j].y - p[i].y) / r3[i][j];
           p[i].az += p[j].m * (p[j].z - p[i].z) / r3[i][j];

        }
        p[i].bx = p[i].ax;
        p[i].by = p[i].ay;
        p[i].bz = p[i].az;
    }
}


// ahora podría calcular la velocidad clásica
// y las posiciones clásicas,
// si fuera necesario

// ahora puedo utilizar mi algoritmo,
// que es una gran sumatoria
```

```
for (i = 0; i < N; i++) {

    aux = 1;
    aux2 = 0;

    for (j = 0; j < N; j++){
        if(j != i){
            for(k = 0; k < N; k++){
                if(k != i){

                    aux += - (4 / c2) * p[k].m / r[i][k];
                }
            }


            for(k = 0; k < N; k++){
                if(k != j){

                   aux += - (1 / c2) * p[k].m / r[j][k];
                }
            }


            aux2 = (p[i].vx * p[i].vx);
            aux2 += (p[i].vy * p[i].vy);
            aux2 += (p[i].vz * p[i].vz);
            aux += (1 / c2) * aux2;

            aux2 = (p[j].vx * p[j].vx);
            aux2 += (p[j].vy * p[j].vy);
            aux2 += (p[j].vz * p[j].vz);
            aux += (2 / c2) * aux2;

            aux2 = (p[i].vx * p[j].vx);
            aux2 += (p[i].vy * p[j].vy);
            aux2 += (p[i].vz * p[j].vz);
            aux -= (4 / c2) * aux2;

            aux2 = (p[i].x - p[j].x) * p[j].vx);
            aux2 += (p[i].y - p[j].y) * p[j].vy);
            aux2 += ((p[i].z - p[j].z) * p[j].vz);
            aux2 *= aux2;
            aux += - (3 / (2 * c2 * r[i][j] * r[i][j])) * aux2;

            aux2 = (p[j].x - p[i].x) * p[j].bx);
            aux2 += (p[j].y - p[i].y) * p[j].by);
            aux2 += (p[j].z - p[i].z) * p[j].bz);
            aux += (1 / (2 * c2)) * aux2;


            p[i].ax *= aux;
            p[i].ay *= aux;
            p[i].az *= aux;
```

```
                aux2 = (p[i].x - p[j].x) * (4 * p[i].vx - 3 * p[j].vx);
                aux2 += (p[i].y - p[j].y) * (4 * p[i].vy - 3 * p[j].vy);
                aux2 += (p[i].z - p[j].z) * (4 * p[i].vz - 3 * p[j].vz);
                aux = (1 / c2) * (p[j].m / r3[i][j]) * aux2;

                p[i].ax += aux * (p[i].vx - p[j].vx);
                p[i].ay += aux * (p[i].vy - p[j].vy);
                p[i].az += aux * (p[i].vz - p[j].vz);

                p[i].ax += (7 / (2 * c2)) * (p[j].m * p[j].bx) / r[i][j];
                p[i].ay += (7 / (2 * c2)) * (p[j].m * p[j].by) / r[i][j];
                p[i].az += (7 / (2 * c2)) * (p[j].m * p[j].bz) / r[i][j];

            }
        }
    }


    // libero memoria y me voy

    free r;
    free r3;

    return 0;
}
```

Agradecimientos

Pasó el ayer,
pasó también el hoy:
se va la primavera.
Buson

Muchas cosas fueron necesarias para que yo pudiese terminar este trabajo; más tiempo del planeado pasó mientras lo concretaba, y fue creciendo sin control en varias computadoras y en hojas sueltas en mi mochila hasta tomar su forma actual. En todo el proceso hubo muchas personas que me acompañaron y soportaron, a las cuales estoy sumamente agradecido.

En primer lugar a mi familia, que me siguió alimentando a pesar de haber elegido esta carrera, y que desde siempre me apoyó e incentivó con una fé admirable.

Agradezco también enormemente a mis tutores, Tabaré Gallardo y Pablo Mora, por toda su guía y por tener tanta paciencia con mis tiempos, siempre irregulares.

Alcides Garat y el colombiano Gregorio Portilla aportaron importante material al principio del proyecto. Un poco antes, entre Alvarito Rittatore y Jorge Griego aprendí mis rudimentos de Relatividad General.

Miguel me ayudó con varias crisis de confianza y me rezongó todo el tiempo, Juan Manuel me prestó el Stephani, que anduvo viajando por Europa en mi mochila, Majo y Lía ayudaron e interrumpieron en momentos oportunos, Daniela ofreció su casa en la Pedrera como retiro espiritual de la Física, y con Andrés, como siempre, terminamos caminando por la Rambla de Malvín, hablando de otras cosas.

Natalia, Valeria, Matías, Silvana y todos los cienciovivos me aguantaron mucho una cabeza en crisis. Con el Choco y el Penguin y mis amigos los nerds siempre había querido hacer algo del estilo de éste trabajo, así que acá tienen. Juan Andrés y Santiago se casaron y tuvieron hijos mientras esto se iba escribiendo, y ahora que se terminó al fin voy a poder empezar a ser tío como corresponde.

Gracias en definitiva a todos mis amigos los físicos, los astrónomos y a los matemáticos y biólogos por tantas horas de distracción y de amistad pocas veces merecida.

Y de nuevo, lo más necesario de todo en el camino fue haberme encontrado con Lucía, haber tenido toda esa suerte. Ahora que me acompaña – y que me ayuda a hacer las cuentas y a poner las comas – el mundo es un lugar muchísimo más lindo.

Bibliografía

[1] Brumberg, V. (1991). Essential Relativistic Celestial Mechanics. (Adam Hilger, Bristol).

[2] Callahan, J.J. (2000). The Geometry of Spacetime. (Springer Verlag, New York).

[3] Carpino, M., Milani, A. & Nobili, A.M., 1987, Astron. Astrophys. 181, 182–194.

[4] Danby, J.M.A. (1992). Fundamentals of Celestial Mechanics. (Willman-Bell).

[5] Do Carmo, M. (1979). Geometria Riemanniana. (IMPA, Rio de Janeiro).

[6] Explanatory Suplement to the Astronomical Almanac. (US Naval Observatory).

[7] Feynman R. (1967). The character of physical law. (The MIT Press, Harvard).

[8] Gallardo, T., EVORB; http://www.fisica.edu.uy/~gallardo/evorb.html

[9] Griffiths, D. (1999). Introduction to Electrodynamics. (Prentice Hall).

[10] Haugan, M.: 1985, Post-Newtonian Arrival-Time Analysis for a Pulsar in a Binary System, Astrophys. J. 296, 1–12.

[11] Ito, T., Tanikawa, K., 2002, Mon. Not. R. Aston. Soc. 336, 483–500.

[12] Juric M. & Tremaine S., 2005, BAAS 37, no 2, 5.10.

[13] Murray, C.D. & Dermott S.F., (1999). Solar System Dynamics. (Cambridge University Press, Cambridge).

[14] Lai D., Rasio F.A., Shapiro S. L., 1994, Astrophys. J. 423 344.

[15] Laskar J., 1988, Astron. Astrophys. 198, 341–362.

[16] Laskar, J., Robutel, P., 1993, Nature, 361, 608–612.

[17] Portilla J.G. (2001). Elementos de Astronomía de posición. (Universidad Nacional de Colombia).

[18] Quinn, T., Tremaine, S. & Duncan, M. 1991, AJ, 101, 2287.

[19] Resnick, R. (1968). Introduction to Special Relativity. (J. Wiley & sons).

[20] Sagan C. & Druyan, A. (1986). El Cometa. (Planeta).

[21] Schafer, G., Wex, N. 1993, Second Post-Newtonian Motion of Compact Binaries, Phys. Lett. A, 174, 196–205.

[22] Shahid-Saless, B. & Yeomans, D. 1994, AJ, 107, 5.

[23] Soffel M.H., (1990). Lectures on Post Newtonian Theory. (Editorial de la Universidad de Costa Rica, San José).

[24] Stephani, H. (1990). Introduction to the theory of the gravitational field. (Cambridge University Press, Cambridge).

[25] Taylor, J.H., Fowler, L.A. & Weisberg, J.M., 1979, Nature 277, 437.

[26] Thorne K.S., Misner C.W., Wheeler J.A.. (1973). Gravitation. (W. H. Freeman).

[27] Varadi, F., Runnegar, B. & Ghil, M. 2003, AJ, 592, 620.

[28] Weinberg, S. (1972). Gravitation and Cosmology. (J. Wiley & sons).

[29] Weinberg, S. (1994). Dreams of a Final Theory. (Vintage).

[30] Will, C.M. (1981). Theory and Experiment in Gravitational Physics. (Cambridge University Press, Cambridge).