Ciencias Planetarias

Notas de curso

(version 18 Julio 2017)

Tabaré Gallardo
Departamento de Astronomía, Facultad de Ciencias, Uruguay
www.astronomia.edu.uy/depto/planetologia/planet.html
gallardo@fisica.edu.uy

Estas notas solo intentan resumir los principales desarrollos matematicos del curso Ciencias Planetarias. Seguramente hay errores, por favor comuniquelos via email.

1 Dinamica

1.1 Problema de 2 cuerpos: movimiento Kepleriano

Si $\mu = G(M+m)$, la ecuacion de movimiento es

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

cuya solucion es una conica:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{2}$$

Multiplicando escalarmente por $\dot{\vec{r}}$ e integrando obtenemos la ecuacion de la energia $\varepsilon_c + \varepsilon_p = \varepsilon$:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{3}$$

o mejor dicho, energia por unidad de masa. Si $\varepsilon < 0$ la orbita es eliptica, si $\varepsilon > 0$ es una hiperbola y si $\varepsilon = 0$ es una parabola.

1.2 Velocidad circular y de escape

Dada una distancia r la velocidad para que la orbita sea circular $r = a$ es

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{4}$$

y la velocidad necesaria para que la orbita sea parabolica (escape):

$$v_e = \sqrt{\frac{2\mu}{a}} \tag{5}$$

Multiplicando vectorialmente la ecuacion de movimiento por $\dot{\vec{r}}$ e integrando obtenemos el momento angular:

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = r\dot{\theta}^2 \hat{z} = 2\frac{dA}{dt}\hat{z} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}\hat{z} \tag{6}$$

En el caso de orbita cerrada (o sea, eliptica) tenemos $h = 2\pi ab/T$, de donde la velocidad angular media llamada movimiento medio es

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{7}$$

1.3 Resonancias orbitales

Ocurren cuando los periodos orbitales de un asteroide y un planeta verifican $T/T_p = N/M$ siendo M, N enteros, o sea

$$a \simeq a_p (N/M)^{2/3} \tag{8}$$

En estos casos las perturbaciones del planeta sobre el asteroide siguen un patron repetitivo que genera una evolucion orbital del asteroide bien diferente al de uno no resonante.

1.4 Parametro de Tisserand, T

En el esquema del problema circular restricto de tres cuerpos se prueba la existencia de la constante de Jacobi que traducida a elementos orbitales constituye la cuasi constante de Tisserand de un asteroide o cometa respecto a un planeta

$$T = \frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_p}(1-e^2)}\cos i \tag{9}$$

En las unidades del PCR3C se prueba que la velocidad de encuentro es $U = \sqrt{3-T}$, de donde si $T > 3$ el objeto no puede aproximarse al planeta.

1.5 Perturbaciones

Variaciones orbitales generadas por pequeñas fuerzas diferentes de la atraccion central (solar). Si la aceleracion perturbadora tiene componentes radial, transversa y normal (R, T, N), la *energia* orbital varia como

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (R, T, N) \cdot \vec{v} = (R, T, N) \cdot (\dot{r}, r\dot{\theta}, 0) = R\dot{r} + Tr\dot{\theta} \tag{10}$$

la componente normal no afecta la energia orbital. Como $\varepsilon = -\mu/2a$ derivando podemos obtener la variacion del semieje

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu}(R\dot{r} + T\frac{h}{r}) \tag{11}$$

Analogamente se puede obtener la variacion en los demas elementos orbitales.

1.6 Mareas y limite de Roche

Sea un planeta M de radio R_p con un satelite m de radio R a una distancia r. La aceleracion del planeta es $a = GM/r^2$. Marea es la diferencia Δa entre la superficie y el centro del satelite:

$$\Delta a = \frac{2GM}{r^3}R \tag{12}$$

Si Δa es igual o mayor a la gravedad superficial del satelite Gm/R^2 el satelite se destruye si su cohesion es despreciable:

$$\frac{Gm}{R^2} \sim \frac{2GM}{r^3}R \tag{13}$$

de donde la distancia limite r_L es

$$r_L \sim R\Big(\frac{2M}{m}\Big)^{1/3} = R_p\Big(\frac{2\rho_p}{\rho_s}\Big)^{1/3} \tag{14}$$

Si consideramos que el satelite orbita con $\omega^2 = GM/r^3$ y rota sincronicamente el factor 2 sera un 3. Y si consideramos que el satelite es un fluido en equilibrio hidrostatico se deformara y se obtiene el tan conocido como dificil de deducir limite de Roche:

$$r_R \sim 2.46R_p\Big(\frac{\rho_p}{\rho_s}\Big)^{1/3} \tag{15}$$

1.7 Mareas orbital

La marea del Sol sobre el sistema Tierra-Luna es

$$\Delta a = \frac{2GM_\odot}{r^3}\Delta \tag{16}$$

siendo Δ la distancia Tierra-Luna. Si Δa es igual o mayor a la aceleracion de la Tierra sobre la Luna $GM_\oplus/\Delta^2$ la Luna escapa:

$$GM_\oplus/\Delta^2 \sim \frac{2GM_\odot}{r^3}\Delta \tag{17}$$

de donde la distancia limite Δ_L es

$$\Delta_L \sim r\Big(\frac{M_\oplus}{2M_\odot}\Big)^{1/3} \tag{18}$$

1.8 Esfera de Hill

Hay varias maneras de definir la region donde el planeta domina gravitacionalmente. La mas usual es la obtenida en el problema restringido de 3 cuerpos:

$$R_H = a_p\Big(\frac{m_p}{3(M_\odot + m_p)}\Big)^{1/3} \tag{19}$$

llamada esfera de Hill para el planeta de masa m_p y semieje a_p. Los satelites permanentes necesariamente estan dentro de R_H.

1.9 Momento de inercia de planeta esferico

Supongamos un planeta esferico. Masa de un anillo:

$$dm = \rho(r) dr d\phi r 2\pi r \cos\phi \tag{20}$$

donde ϕ es la latitud. Momento de inercia del anillo:

$$dm (r\cos\phi)^2 \tag{21}$$

de donde el momento de inercia de una esfera es

$$I = \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^4 2\pi (\cos\phi)^3 \rho(r) dr d\phi = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr \tag{22}$$

si la densidad es constante obtenemos

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \tag{23}$$

El momento angular rotacional de una esfera que rota con velocidad angular ω es $I\omega$ y su energia cinetica rotacional $\frac{1}{2} I\omega^2$.

1.10 Energia potencial de esfera

Energia potencial de cascara de radio r y espesor dr

$$d\varepsilon_p = -G \frac{M(r)}{r} 4\pi r^2 dr \rho(r) \tag{24}$$

donde

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr \tag{25}$$

Si ρ es constante se obtiene

$$\varepsilon_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \tag{26}$$

1.11 Presion de radiacion

Para particulas del orden de 10^{-6} m. Fuerza de los fotones sobre la particula de radio R:

$$F_{rad} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mc}{\Delta t} = \frac{\Delta mc^2}{\Delta t} \frac{1}{c} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \frac{1}{c} = \frac{L_\odot \pi R^2}{4\pi r^2} Q_{rad} \frac{1}{c} \tag{27}$$

siendo Q_{rad} un coeficiente de eficiencia. La fuerza gravitacional del sol es

$$F_g = \frac{GM_\odot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2} \tag{28}$$

de donde

$$\frac{F_{rad}}{F_g} = \frac{3 L_\odot Q_{rad}}{16\pi c G M_\odot R\rho} = cte \frac{Q_{rad}}{R\rho} \equiv \beta \tag{29}$$

Gravedad efectiva:

$$(1-\beta) \frac{GM_\odot m}{r^2} \tag{30}$$

Si β es pequeño el movimiento es una elipse pero con periodo orbital mayor al Kepleriano. Si $\beta \sim 1$ o mayor la particula escapa.

1.12 Efecto Poynting-Robertson

Para particulas del orden de 10^{-4} m. Si se absorben todos los fotones la potencia absorbida es

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{L_{\odot}\pi R^2}{4\pi r^2} \tag{31}$$

Por efecto Doppler hay un exceso de emision en la direccion del movimiento dado por un factor v/c. La fuerza neta del efecto es contraria al movimiento y dada por

$$F_{PR} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}\frac{1}{c}\frac{v}{c}Q_{PR} = \frac{L_{\odot}R^2}{4r^2c}\frac{v}{c}Q_{PR} \tag{32}$$

Si la orbita es cuasi circular ($\dot{r} \sim 0, r \sim a$) el semieje varia como

$$\frac{da}{dt} = \frac{2ah}{GM_{\odot}}T = -\frac{3L_{\odot}}{8\pi c^2 aR\rho}Q_{PR} \tag{33}$$

o sea disminuye sistematicamente y la particula cae al Sol.

1.13 Efecto Yarkovsky

Para asteroides del orden de m a km. En un lapso Δt un asteroide emite en un hemisferio como

$$\varepsilon = \sigma T^4 2\pi R^2 \Delta t \tag{34}$$

pero si hay una diferencia de temperatura entre mañana y tarde la diferencia de emision entre ambos hemisferios ese estima como

$$\Delta\varepsilon \sim \frac{d\varepsilon}{dT}\Delta T \propto 4\sigma T^3 2\pi R^2 \Delta T \Delta t \tag{35}$$

Esta diferencia genera una fuerza neta sobre la region mas caliente en direccion entrante

$$F_Y = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}\frac{1}{c} \propto \frac{4\sigma T^3 2\pi R^2}{c}\Delta T \propto T^3 R^2 \Delta T \tag{36}$$

donde ΔT depende de la conductividad del material. Si es muy buen conductor $F_Y \sim 0$.

1.14 Frenado por viento solar

Para particulas del orden de 10^{-7} m o menos. Son basicamente protones que impactan a la particula de polvo con velocidad relativa del orden de 10^2 km/s con componentes $(R, T, 0)$. La componente R afecta el periodo orbital pero la T frena a la particula. Analogo a Poyting-Robertson pero como $v_{vs} << c$ hay un efecto de aberracion importante y la particula de polvo se frena y cae al Sol.

1.15 Frenado gaseoso

Una particula de polvo esferica que se mueve a velocidad v respecto al gas recibe una fuerza dada por $F = \Delta p/\Delta t$ donde Δp es la cantidad de movimiento cedida por el gas a la particula

$$\Delta p \sim \Delta m \cdot v = (\pi R^2 \Delta t v\rho)v \tag{37}$$

donde Δm es la masa total que impacta la particula. Considerando que es un efecto tridimensional se obtiene el "drag"

$$F_D = \frac{C_D}{2}\pi R^2 v^2 \rho \tag{38}$$

siendo C_D un coeficiente, R el radio de la particula de polvo y ρ la densidad del gas.

2 Radiacion solar

2.1 Ley de Planck

Se puede asumir que la principal parte de la energia del Sol se emite siguiendo la ley de Planck:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{39}$$

y tiene unidades de intensidad: W m^{-2} Hz^{-1} sr^{-1}.

2.2 Intensidad y flujo

Energia emitida por superficie luminosa dA dentro de un angulo solido $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ es:

$$dE_\nu = I_\nu(\theta) d\nu dt dA \cos\theta d\omega \tag{40}$$

La intensidad integrada en frecuencia o longitud de onda es

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_\infty^0 I_\lambda d\lambda \tag{41}$$

y si $I_\nu = B_\nu(T)$ tenemos que la intensidad integrada es $I = \sigma T^4/\pi$. I_ν se mide en Jansky que tiene unidades de Watt m^{-2} Hz^{-1}sr^{-1}.

La densidad de flujo o "flujo" se obtiene integrando en angulo solido $d\omega$

$$F_\nu = \frac{1}{d\nu dt dA} \int_S dE_\nu = \int_S I_\nu \cos\theta d\omega \tag{42}$$

y si es isotropo (I independiente de θ):

$$F_\nu = I_\nu \int_S \cos\theta d\omega \tag{43}$$

El flujo isotropo saliente es

$$F_+ = I_\nu \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta d\varphi = \pi I_\nu \tag{44}$$

de donde si $I_\nu = B_\nu(T)$ tenemos que el flujo saliente integrado es

$$F = \sigma T^4 \tag{45}$$

2.3 Transferencia radiativa

si el medio no interactua con los fotones la I se mantiene constante (no asi el flujo). Si hay interaccion tenemos

$$dI(r) = -I(r)\alpha(r)dr + j(r)dr \tag{46}$$

Se define profundidad optica:

$$d\tau = \alpha(r)dr \tag{47}$$

de donde

$$\frac{dI(\tau)}{d\tau} = -I(\tau) + S(\tau) \tag{48}$$

donde $S = j/\alpha$ es la funcion fuente. Si S es independiente de τ la solucion es

$$I(\tau) = S + (I(0) - S)\exp(-\tau) \tag{49}$$

- si $\tau \gg 1$ tenemos $I = S$
- si $S = 0$ tenemos $I(\tau) = I(0)exp(-\tau)$
- si hay ETL tenemos $S(\tau) \sim B(T(\tau))$

2.4 Camino libre medio de los fotones

Distancia recorrida l hasta que la intensidad cae en $1/e$, o sea que l es tal que $\tau = 1$ por lo que $l = 1/\alpha$. Los fotones que recibimos del Sol provienen de diferentes profundidades opticas. El numero de fotones, N_f, que recibimos de una profundidad τ es proporcional a $N_0 e^{-\tau}$ y la profundidad optica media de los fotones que recibimos se obtiene como

$$< \tau >= \frac{\int_0^\infty \tau N_0 e^{-\tau}}{\int_0^\infty N_0 e^{-\tau}} = 1 \tag{50}$$

De donde, si el medio es opticamente grueso los fotones que recibimos son representativos de una region donde $< \tau >= 1$.

2.5 Extincion atmosferica

Si m_0 es la magnitud fuera de la atmosfera y m la observada en el suelo:

$$m - m_0 = -2.5 \log \frac{I}{I_0} = \tau 2.5 \log e \simeq \tau \tag{51}$$

2.6 Flujo observado

Sea $F_\odot = \sigma T_\odot^4$ el flujo saliente del Sol. La luminosidad incidente (potencia interceptada por el planeta de radio R a la distancia r) sera:

$$L_{in} = F_\odot \frac{R_\odot^2}{r^2} \pi R^2 \tag{52}$$

y la reflejada

$$L_{ref} = L_{in} A \tag{53}$$

donde A es el albedo Bond. Flujo observado desde una distancia Δ a un cierto angulo de fase α (energia por unidad de area y tiempo):

$$F_{ob}(\alpha) = \frac{L_{ref}}{4\pi\Delta^2} \phi(\alpha) C \tag{54}$$

donde $\phi(\alpha)$ es la funcion de fase tal que $\phi(0) = 1$. La constante de normalizacion C se obtiene de

$$\int_S F_{ob}(\alpha) dS = L_{ref} \tag{55}$$

$$\int_S \frac{L_{ref}}{4\pi\Delta^2} \phi(\alpha) C dS = L_{ref} \tag{56}$$

$$\int_S \frac{1}{4\pi\Delta^2} \phi(\alpha) C dS = 1 \tag{57}$$

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\Delta^2} \phi(\alpha) C \Delta \sin\alpha d\alpha \Delta d\varphi = 1 \tag{58}$$

de donde

$$C = 2 / \int_{\alpha=0}^{\pi} \phi(\alpha) \sin\alpha d\alpha \tag{59}$$

2.7 Albedo Bond y geometrico.

El albedo Bond es integrado en todo el espectro y mide la fraccion de energia reflejada. Superficie plana ideal (Lambertiana) se define como: $A_L = 1$, $\phi(\alpha) = \cos\alpha$ en $(0 < \alpha < \pi/2)$ y $\phi(\alpha) = 0$ en $(\pi/2 < \alpha < \pi)$. Se deduce que la constante es $C_L = 4$

Se llama albedo geometrico p la relacion entre flujo observado en fase cero del objeto y el flujo de una superficie plana ideal:

$$p = \frac{F_{ob}(\alpha = 0)}{F_L} = \frac{CA}{C_L A_L} = \frac{CA}{4} \tag{60}$$

de donde el albedo Bond y el geometrico se relacionan como

$$A = pq \tag{61}$$

donde $q = 2\int_{\alpha=0}^{\pi} \phi(\alpha)\sin\alpha d\alpha$ es la integral de fase. En general la funcion de fase $\phi(\alpha)$ no se conoce en cambio siempre es posible medir $F_{ob}(0)$, por lo cual muchas veces apenas se conoce el albedo geometrico de los objetos, obtenido de $p = F_{ob}/4$. Solo cuando se puede calcular q podemos conocer el albedo Bond.

2.8 Magnitud observada y absoluta

Dado que

$$F_{ob}(\alpha) = cte\frac{\phi(\alpha)}{(r\Delta)^2} \tag{62}$$

por definicion de magnitud observada tenemos

$$m = \mathcal{C} - 2.5\log F_{ob}(\alpha) = H + 5\log(r\Delta) - 2.5\log\phi(\alpha) \tag{63}$$

donde H (tambien conocida como $V(1,0)$) es la magnitud absoluta, la magnitud observada si $r = \Delta = 1$ ua y $\alpha = 0$

2.9 Temperatura superficial de equilibrio

La luminosidad absorbida:

$$L_{abs} = F_\odot \frac{R_\odot^2}{r^2}\pi R^2(1 - A) \tag{64}$$

La luminosidad reemitida, ignorando fuentes internas de calor:

$$L_{em} = \sigma T^4 S \tag{65}$$

Con $S = 4\pi R^2$ para rotador rapido y $S = 2\pi R^2$ para lento. Si la superficie esta en equilibrio termico se igualan y obtenemos

$$T_{eq}^4 = T_\odot^4 \frac{R_\odot^2}{r^2}\frac{(1 - A)}{4} \tag{66}$$

para rotador rapido (para lento se cambia el 4 por un 2). La T_{eq} es la predicha por la teoria, en cambio la que se deduce de la luminosidad observada es la llamada temperatura *efectiva*.

2.10 Temperatura subsolar

Si es un rotador lento, el flujo absorbido por un elemento de area de superfice que tiene al Sol a una distancia cenital z es

$$F_\odot \frac{R_\odot^2}{r^2}\cos z(1 - A) \tag{67}$$

y el reemitido

$$\sigma T^4 \tag{68}$$

igualando se obtiene la temperatura en funcion de z, $T(z)$. La temperatura subsolar es la correspondiente al Sol en el cenit ($z = 0$).

2.11 Insolacion

La insolacion es la cantidad de energia solar, Q, recibida por un elemento de area al cabo de un dia:

$$Q = \int_{tsal}^{tpue} F_\odot \frac{R_\odot^2}{r^2} \cos z dt \tag{69}$$

se hace el cambio de variable a angulo horario $dH = \frac{2\pi}{Per} dt$ y se usa $cosz = \sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H$ obteniendo

$$Q(r, \delta, \phi) = F_\odot \frac{R_\odot^2}{r^2} \frac{Per}{\pi} (\sin\phi \sin\delta H_p + \cos\phi \cos\delta \sin H_p) \tag{70}$$

donde H_p es el angulo horario de puesta del Sol ($\cos H_p = -\tan\phi \tan\delta$) y Per es la duracion del dia o periodo sinodico de rotacion del objeto. ϕ es la latitud del punto y δ es la declinacion del Sol para ese dia visto desde el planeta.

3 Atmosferas

3.1 Equilibrio hidrostatico y escala de altura

Tomando como ecuacion de estado la del gas perfecto siendo N la densidad numerica:

$$P = NkT = \frac{\rho}{\mu} kT \tag{71}$$

y asumiendo equilibrio hidrostatico

$$dP = -g(r)\rho(r)dz \tag{72}$$

donde

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g_{sup} \frac{R^2}{r^2} \tag{73}$$

con $r = R + z$. Dado que $\rho = \frac{P\mu}{kT}$

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g\mu}{kT} dz = -\frac{dz}{H} \tag{74}$$

Definimos escala de altura

$$H(z) = \frac{kT}{g\mu} \tag{75}$$

y si asumimos H constante:

$$P(z) = P_{sup} e^{-z/H} \tag{76}$$

Pero H no es constante, solo da una idea de como cae la presion a cierta altura z. Ver que a menor μ, mayor H, los gases mas livianos se extienden mas alto en la atmosfera respecto a los mas pesados. En el caso de la Tierra con principales componentes N_2 y O_2 tenemos $H_{sup} = 9$ km y en la exosfera $H_{exo} = 30$ km.

Presion superficial asumiendo $g = cte$

$$\int_{sup}^{\infty} dP = -\int_{z=0}^{\infty} g(r)\rho(r)dr = -g \frac{m_{atm}}{4\pi R^2} \tag{77}$$

de donde

$$P_{sup} = g \frac{m_{atm}}{4\pi R^2} \tag{78}$$

3.2 Densidad integrada

Numero de moleculas por unidad de area desde z hasta ∞

$$N_{int}(z) = \int_z^{\infty} N(z)dz = -\int_{P(z)}^{P(\infty)} \frac{dP}{g\mu} = \frac{P(z)}{g\mu} = \frac{N(z)kT}{g\mu} \tag{79}$$

de donde

$$N_{int}(z) = N(z)H(z) \tag{80}$$

3.3 Exosfera

Camino libre medio l de una molecula de seccion eficaz σ a una altura z se obtiene de

$$\sigma l N(z) = 1 \tag{81}$$

La exosfera se define integrando en direccion vertical pues N depende de z:

$$\int_z^\infty \sigma N(z) dz = 1 = \sigma \int_z^\infty N(z) dz = \sigma N_{int}(exo) = \sigma N_{exo} H_{exo} \tag{82}$$

entonces

$$\sigma N_{exo} H_{exo} = 1 \tag{83}$$

de donde podemos concluir que el camino libre medio vertical en la base de la exosfera es igual a la escala de altura de la atmosfera, $l = H_{exo}$.

3.4 Escala termica

Considerando una columna de atmosfera de base dS, la energia cinetica sera

$$\varepsilon_c \sim N_{int}(0) kT dS = N(0)H(0)kT dS = P_{sup} H(0) dS \tag{84}$$

la energia emitida por unidad de tiempo es $\sigma T^4 dS$, de donde el tiempo necesario para que la atmosfera pierda todo el calor es la llamada escala termica

$$t \sim \frac{PH}{\sigma T^4} \tag{85}$$

si la escala termica es del orden de horas o menos la atmosfera se congelaria en la noche.

3.5 Escape termico o Jeans

La distribucion de velocidades de las moleculas sigue un Maxwelliana $f(v) \propto e^{-\lambda}$ donde el parametro λ esta dado por $\lambda = (v/v_0)^2$ donde la velocidad media v_0 sale de $v_0^2 = 2kT/\mu$. El numero de moleculas que escapa por unidad de tiempo y area es la integral de todas las moleculas con velocidad superior a la de escape que apuntan hacia arriba desde la exosfera:

$$\Phi_J = N_{exo} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{v_{esc}}^\infty v \cos\theta f(v) dv = N_{exo} \frac{v_0}{2\sqrt{\pi}} (1 + \lambda_{esc}) e^{-\lambda_{esc}} \tag{86}$$

con

$$\lambda_{esc} = (\frac{v_{esc}}{v_0})^2 = \frac{g\mu}{kT}(R+z) = \frac{(R+z)}{H(z)} \tag{87}$$

siendo en este caso z la base de la exosfera. O sea, λ_{esc} = distancia planetocentrica de la exosfera sobre escala de altura de la exosfera.

3.6 Escala de tiempo de perdida de atmosfera

Si S es la superficie de la atmosfera, el numero de moleculas en la exosfera

$$N \sim N_{exo} H S \tag{88}$$

tasa de perdida

$$\frac{dN}{dt} = \Phi_J S \tag{89}$$

el tiempo de escape:

$$t_{esc} = N / \frac{dN}{dt} = N_{exo} H / \Phi_J \tag{90}$$

si $\lambda_{esc} > 1$ tenemos

$$t_{esc} \sim \frac{H e^{\lambda_{esc}}}{v_0 \lambda_{esc}} \tag{91}$$

3.7 Gradiente adiabatico

Imponiendo $dQ = 0$ se llega a

$$TP^{1/\gamma - 1} = cte \tag{92}$$

donde $\gamma = C_p/C_v$. Para un gas monoatomico $\gamma = 5/3$, diatomico $\gamma = 7/5$ y poliatomico $\gamma = 4/3$. Diferenciando e imponiendo equilibrio hidrostatico llegamos al gradiente convectivo

$$\frac{dT}{dr}\mid_{conv} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{g\mu}{k} \tag{93}$$

Si obtenemos que

$$\frac{dT}{dr}\mid_{rad} > \frac{dT}{dr}\mid_{conv} \tag{94}$$

la radiacion es ineficiente transportando el calor y se instala el movimiento convectivo en la atmosfera.

3.8 Efecto invernadero

La temperatura de la capa superior de la atmosfera es la temperatura de equilibrio T_{eq} del planeta. Si la profundidad optica en el infrarrojo es τ y se admite transporte radiativo se prueba que la temperatura en la superficie del planeta es

$$T_{sup} = T_{eq}(1 + \frac{3}{4}\tau)^{1/4} \tag{95}$$

Pero si τ es muy grande habra gran gradiente termico radiativo y se instalara la conveccion.

3.9 Captura isoterma

Supongamos una nube infinita con cierta densidad ρ y temperatura T. Colocamos un planeta y considerando exclusivamente su campo gravitacional la nube se reacomodara debido al equilibrio hidrostatico. Suponiendo que la temperatura es constante podemos calcular la presion superficial en el planeta de radio R y masa M.

$$dP = -\frac{GM}{r^2}\rho dr = -\frac{GM}{r^2}\frac{P\mu}{kT}dr \tag{96}$$

$$\int_{P_{sup}}^{P_\infty} \frac{dP}{P} = -\frac{GM\mu}{kT}\int_R^\infty r^{-2}dr \tag{97}$$

de donde

$$P_{sup} = P_\infty e^\alpha \tag{98}$$

con $\alpha = \frac{GM\mu}{kTR}$ donde $P_\infty = k\rho T/\mu$.

4 Superficies

4.1 Inercia termica y piel termica

La Ley de Fourier relaciona el gradiente de temperatura con el flujo Q de calor en direccion z (calor por unidad de area y tiempo):

$$Q = -K_T\frac{\partial T}{\partial z} \tag{99}$$

donde K_T es la *conductividad termica*. El gradiente de temperatura es contrario al flujo Q. Ver que $\Delta T \propto 1/K_T$. Algunos K_T: regolito $\sim$ 0.001 - 0.01, condrita $\sim$ 1, rocas y hielos entre 2 y 4, metales $\sim$ 40 W/mK.

Si hay una variacion en el flujo Q al cabo de cierto tiempo existira una acumulacion de calor dado por:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \cdot \rho \cdot C_p \cdot \Delta T = (Q(z) - Q(z + \Delta z)) \cdot \Delta x \Delta y \cdot \Delta t \tag{100}$$

de donde

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho C_p} \frac{\partial Q}{\partial z} \tag{101}$$

Para las rocas $C_p \sim 1200$ J/kgK, para el hielo $C_p \sim 4200$ J/kgK. Ver que $\Delta T \propto 1/\rho C_p$. Entonces $\Delta T \propto \frac{1}{\rho C_p} \frac{1}{K_T} = \frac{1}{\gamma^2}$. De donde se define *inercia termica*:

$$\gamma = \sqrt{K_T \rho C_p} \tag{102}$$

que es una medida de la relajacion entre la absorcion y la reemision del calor. Gran inercia termica implica poca variacion de temperatura. El efecto Yarkovsky es $\propto \gamma/(1 + a\gamma + b\gamma^2)$

Si diferenciamos $\partial(99)/\partial z$ usando (101) obtenemos:

$$-K_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{103}$$

o sea:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K_T}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{104}$$

que es la ecuacion de difusion del calor donde se define *difusividad termica* como:

$$k_D = K_T / \varrho C_p \tag{105}$$

que da una idea de la penetrabilidad del calor. Para rocas y hielo $k_D \sim 10^{-6}$ m^2/seg.

Dado un planeta de temperatura uniforme cuya temperatura superficial ($z = 0$) se hace variar periodicamente con periodo $P = 2\pi/\omega$ de la forma $cte + T_0 \cos(\omega t)$ queremos ver como es la funcion que da la variacion de temperatura $T(z, t)$. Buscamos soluciones del tipo $T(z, t) = Z(z)\tau(t)$ y obtenemos

$$T(z, t) = T_0 e^{-z/L} \cos[(\omega t - z/L)] \tag{106}$$

donde

$$L = \sqrt{2k_D/\omega} \tag{107}$$

que se define como *profundidad de piel termica* que nos da una idea de hasta que profundiad son apreciables las variaciones superficiales periodicas (diarias, anuales) de temperatura. Algunos valores: Marte y Luna ~ 4 cm, Mercurio ~ 15 cm. Una alta K_T implica poca variacion superficial de temperatura pero gran penetrabilidad al interior del planeta.

4.2 Crateres de impacto

La presion de la atmosfera sobre el asteroide es $P \sim \frac{1}{2}\rho_{atm} v^2$ la cual puede destruir al asteroide si supera su resistencia S_m. Si llega al suelo, la presion de la onda de impacto sobre el suelo de densidad ρ es $P \sim \frac{1}{2}\rho v^2$.

La distribucion cumulativa de crateres (numero de crateres con diametro mayor que D) es

$$N_c(D) = aD^\alpha \tag{108}$$

con $\alpha < 0$. El maximo crater teorico se obtiene imponiendo $N_c(D_{max}) = 1$. El numero de crateres con diametro entre D_1, D_2 es $N_c(D_1) - N_c(D_2) = -dN_c$. De donde la distribucion no cumulativa se obtiene de

$$N(D) = -\frac{dN_c}{dD} = -a\alpha D^{\alpha - 1} \tag{109}$$

El area ocupada por los crateres entre D_1, D_2 suponiendo que no se superponen es

$$Area(D_1, D_2) = \int_{D_1}^{D_2} \pi (D/2)^2 N(D) dD \tag{110}$$

En general para $D < D_{sat}$ la superficie esta saturada, es decir los crateres se superponen. D_{sat} se obtiene imponiendo

$$4\pi R_p^2 = \int_{D_{sat}}^{D_{max}} \pi (D/2)^2 N(D) dD \tag{111}$$

5 Interiores

5.1 Coeficiente de inercia

El momento de inercia de un planeta esferico con densidad constante es

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \tag{112}$$

Si el coeficiente de inercia $\frac{I}{MR^2}$ es menor que 0.4 es indicativo de que la densidad crece al centro.

5.2 Presion interna y resistencia

La presion interna se obtiene por equilibrio hidrostatico:

$$dP = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr \tag{113}$$

si asumimos densidad constante

$$M(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \rho \tag{114}$$

podemos calcular la presion interna como

$$\int_{sup}^{P(r)} dP = P(r) - 0 = -\int_R^r \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr \tag{115}$$

Si en algun lugar $P(r) > S_m$ el material se reacomoda. La presion central se calcula como $P(r = 0)$.

5.3 Potencial y achatamiento

Para un planeta que rota con ω se define

$$q_r = \frac{a_{cen}}{a_{gra}} = \frac{\omega^2 R^3}{GM} \tag{116}$$

La distribucion interna de masas determina el potencial gravitacional. Si tiene simetria de revolucion:

$$V(r, \theta) = -\frac{GM}{r} \Big[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{R}{r} \Big)^n J_n P_n(\cos\theta) \Big] \tag{117}$$

donde θ es la colatitud, R el radio ecuatorial, P_n los polinomios de Legendre y los J_n son los momentos gravitacionales. Si esta en equilibrio hidrostatico hay simetria norte-sur, los J impares son nulos y se cumple $J_{2n} \propto q_r^n$. Se cumple que

$$J_2 = (C - A)/MR^2 \tag{118}$$

Se define achatamiento como

$$\varepsilon = (R_e - R_p)/R_e \tag{119}$$

Si hay equilibrio hidrostatico se prueba

$$\varepsilon \simeq \frac{3}{2}J_2 + \frac{q_r}{2} \tag{120}$$

Si se trata de un fluido se verifica

$$J_2 = \frac{q_r}{2} \tag{121}$$

por lo cual el achatamiento en un fluido es

$$\varepsilon = \frac{5}{4}q_r \tag{122}$$

Un solido en equilibrio hidrostatico verifica la relacion de Radau-Darwin

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5q_r}{2\varepsilon} - 1}\Big) \tag{123}$$

5.4 Precesion

Sobre el abultamiento ecuatorial del planeta un satelite genera un momento $\vec{M}$ que a su vez produce una variacion del momento angular del planeta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{124}$$

generando precesion de su eje de rotacion. Velocidad angular de precesion de un planeta de momentos de inercia A y C que rota con velocidad angular ω generada por un satelite m a una distancia r y con latitud ϕ:

$$\Omega_{pre} = \frac{3Gm\sin(2\phi)}{2r^3\omega}\frac{(C-A)}{C} \tag{125}$$

5.5 Balance de calor

Fuentes: acrecion, contraccion gravitacional, decaimiento radiactivo. Perdidas: radiacion. La minima velocidad de impacto es la v_{esc} del planeta y la energia cinetica aportada es equivalente a la potencial. La energia inyectada a un planeta por un planetesimal m es del orden de su energia potencial, o sea GMm/R. Si el planeta acreta proyectiles formando una capa dr la energia incorporada es

$$\frac{GM(r)}{r}4\pi r^2 dr \rho_{pro} \tag{126}$$

Si esa energia se distribuye en una masa m su temperatura se incrementa en $m\Delta T C_p$ asumiendo que no hay perdidas de calor.

La luminosidad total observada de un planeta es

$$L_{tot} = L_{ref} + L_{ree} + L_{int} \tag{127}$$

La temperatura efectiva se define a partir de

$$L_{tot} = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \tag{128}$$

La luminosidad intrinseca es generada por calor original de acrecion, decaimiento radiactivo o contraccion gravitacional y es

$$L_{int} = 4\pi R^2 \sigma (T_{ef}^4 - T_{eq}^4) \tag{129}$$

y genera un incremento de temperatura dado por

$$L_{int} = C_v M \frac{dT}{dt} \tag{130}$$

La cantidad de calor de acrecion almacenada por un planeta es $Q \propto R^3$ y el flujo emitido es $F \propto R^2$ por lo que la vida termica de un planeta es $\propto Q/F \propto R$.

5.6 Ondas P y S

Ondas de presion o primarias

$$v_P = \sqrt{\frac{K_m + \frac{4}{3}\mu_{rg}}{\rho}} \tag{131}$$

ondas de sacudida o secundarias

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu_{rg}}{\rho}} \tag{132}$$

donde μ_{rg} es el modulo de rigidez del material y K_m el modulo de incompresibilidad que se define como

$$K_m = -\frac{dP}{dV/V} \tag{133}$$

y es la presion necesaria para comprimir el volumen un cierto porcentaje. El modulo de rigidez en cambio mide la presion necesaria para modificar la forma manteniendo el volumen constante. En un fluido $\mu_{rg} = 0$ y las ondas S no se propagan.

Eliminando μ_{rg} tenemos

$$K_m/\rho = v_P^2 - \frac{4}{3}v_S^2 \tag{134}$$

K_m y μ_{rg} crecen con ρ y crecen mas rapido por lo que v_S, v_P crecen al interior del planeta. En general dependen de la presion y densidad.

5.7 Ecuacion de estado

De la definicion de K_m:

$$K_m = -V\frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{dV} \tag{135}$$

dado que $M = V\rho$ tenemos por conservacion de masa:

$$dM = \rho dV + V d\rho = 0 \tag{136}$$

entonces

$$K_m = \rho\frac{dP}{d\rho} \tag{137}$$

que suele tomarse como ecuacion de estado para el interior de un planeta solido. Otro modelo de estado posible es

$$P = k\rho^{1+1/n} \tag{138}$$

De la ecuacion de equilibrio hidrostatico y de la ecuacion de estado se obtiene la ecuacion de Adams-Williams para el interior planetario:

$$\frac{d\rho}{dr} = -G\frac{M(r)\rho(r)^2}{r^2 K_m} \tag{139}$$

generalmente K_m/ρ se determina por ondas sismicas y suele presentar discontinuidades (ejemplo, nucleo y manto).

5.8 Planetas gigantes

Asumiendo equilibrio hidrostatico y una ecuacion de estado del tipo

$$P = k\rho^2 \tag{140}$$

se prueba que una solucion es

$$\rho = \rho_c\Big[\frac{\sin(cr)}{cr}\Big] \tag{141}$$

donde ρ_c es la densidad central. Como $\rho(R) = 0$ tenemos $cR = \pi$ por lo que el radio del planeta resulta independiente de la densidad $R = \pi/c$. Se prueba que la masa del planeta es independiente de R. Si a un planeta como Jupiter le agregamos masa se comprime y queda con el mismo radio.

6 Sol

6.1 Ecuaciones de interior

La presion interna se obtiene por equilibrio hidrostatico:

$$dP = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)dr \tag{142}$$

conservacion de masa:

$$dM(r) = 4\pi r^2\rho(r)dr \tag{143}$$

produccion de energia:

$$dL(r) = L(r+dr) - L(r) = \varepsilon(r)dM = 4\pi r^2\rho(r)\varepsilon(r)dr \tag{144}$$

fuera del nucleo $\varepsilon = 0$. Gradiente radiativo:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\sigma}\frac{\alpha}{T^3}\frac{L(r)}{4\pi r^2} \tag{145}$$

y el convectivo es

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{T}{P}\frac{dP}{dr} \tag{146}$$

Ecuacion de estado de gas ideal:

$$P_g = NkT = \frac{\rho}{\mu m_H}kT \tag{147}$$

donde m_H es la masa del nucleo de Hidrogeno y μ en este caso es el peso medio de las particulas dado por

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \tag{148}$$

La presion total es

$$P_t = P_g + P_{rad} \tag{149}$$

donde $P_{rad} = \frac{1}{3}aT^4$ es la presion de los fotones.

7 Cuerpos menores

7.1 Ingreso de meteoro en atmosfera

Movimiento de meteoro de seccion eficaz A y masa m en atmosfera de densidad ρ moviendose a velocidad v:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{PA}{m}\hat{v} - g\hat{z} \tag{150}$$

siendo P la presion del gas sobre el meteoro:

$$P = \frac{C_D}{2}\rho v^2 \tag{151}$$

Al llegar a velocidad de regimen $\dot{\vec{v}} = 0$:

$$P = \frac{mg}{A} = \frac{C_D}{2}\rho v^2 \tag{152}$$

de donde la velocidad de regimen es

$$v = \sqrt{\frac{2gm}{C_D\rho A}} \tag{153}$$

7.2 Datacion radiometrica

Consideremos el decaimiento del Rubidio en Stroncio:

$$^{87}_{37}Rb \longrightarrow ^{87}_{38} Sr + e^- + \gamma \tag{154}$$

debido a

$$n \longrightarrow p^+ + e^- \tag{155}$$

Decaimiento de la poblacion de Rb:

$$\Delta N_R = -N_R \Delta t/\tau \tag{156}$$

donde τ es la vida media. La "media vida" es el tiempo en que cae a la mitad y es $t_{1/2} = \tau \ln 2$. Entonces:

$$N_R = N_R(0) e^{(-\Delta t/\tau)} \tag{157}$$

En cuanto al Sr:

$$N_S = N_S(0) + \Big[N_R(0) - N_R(t) \Big] = N_S(0) + N_R(0) \Big[1 - e^{(-\Delta t/\tau)} \Big] \tag{158}$$

El problema es que $N_S(0), N_R(0)$ son desconocidos. Pero el ^{87}Sr no generado por decaimiento tiene una proporcion de ^{86}Sr que es igual a lo largo de toda la roca. Si graficamos $^{87}Sr/^{86}Sr$ contra $Rb/^{86}Sr$ para varias muestras se forma una recta cuya pendiente es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta N_S}{\Delta N_R} = \frac{\Delta N_S(0) + \Delta N_R(0) \Big[1 - e^{(-\Delta t/\tau)} \Big]}{\Delta N_R(0) e^{(-\Delta t/\tau)}} \tag{159}$$

pero como $\Delta N_S(0) = 0$ pues la relacion inicial $^{87}Sr/^{86}Sr$ es la misma en toda la roca, entonces

$$\frac{\Delta N_S}{\Delta N_R} = e^{\Delta t/\tau} - 1 \tag{160}$$

de donde se puede deducir Δt, la edad de la roca.

7.3 Relacion tamaño - brillo para asteroides

Por definicion de albedo geometrico: $F_{obs} = pF_{Lam}$ siendo el flujo lambertiano en fase cero:

$$F_{Lam} = F_\odot \frac{R_\odot^2}{r^2} \pi R^2 \frac{1}{4\pi\Delta^2} C_L \phi(0) \tag{161}$$

En $r = \Delta = 1$:

$$F_{obs} = pF_\odot R_\odot^2 R^2 \tag{162}$$

Por definicion de magnitud absoluta

$$H(1,0) = C - 2.5 \log F(1,0) = C' - 2.5 \log(pR^2) \tag{163}$$

de donde se obtiene el diametro en km

$$D = 1329 \frac{10^{-H/5}}{\sqrt{p}} \tag{164}$$

7.4 Poblacion de asteroides

Numero de asteroides con radio entre $(R, R + dR)$:

$$N(R)dR = CR^{-\xi} dR \tag{165}$$

Una poblacion evolucionada colisionalmente tiende a tener $\xi = 3.5$. La masa contenida en los asteroides entre R_1 y R_2 se calcula como

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{4}{3} \pi \rho R^3 N(R) dR \tag{166}$$

7.5 Probabilidad de colision

En la aproximacion del modelo de Öpik, en un periodo orbital un asteroide tiene probabilidad $p(\sigma)$ de pasar a una distancia menor a σ (expresada en semiejes planetarios) del centro del planeta donde

$$p(\sigma) = \frac{\sigma^2 U}{\pi \sin i |U_x|} \tag{167}$$

siendo $U = \sqrt{3 - T}$ la velocidad relativa, T el parametro de Tisserand, $U_x = \sqrt{2 - 1/a - a(1 - e^2)}$ con a expresado en semiejes planetarios e i la inclinacion relativa del asteroide respecto al planeta. El tiempo medio en años entre encuentros es $\tau = P_{orb}/p$, siendo P_{orb} el periodo orbital en años del asteroide.

7.6 Limite rotacional

Imponiendo $a_c = a_g$ se obtiene como limite de velocidad angular rotacional

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G \rho} \tag{168}$$

que es independiente del radio del asteroide.

7.7 Cometas

Las fuerzas no gravitacionales en cometas (FNG) generan variaciones orbitales y se modelan segun las direcciones $(\hat{R}, \hat{T}, \hat{N})$ como

$$\eta(r)(A_1, A_2, A_3) \tag{169}$$

donde $\eta(r)$ es modulo de sublimacion. A_1 es el mayor pero tiene efecto neto nulo, los efectos de A_3 se cancelan en una revolucion. El efecto de A_2 es el mas importante porque es sistematico.

Si llamamos "energia" a $x = 1/a$, en un pasaje por el perihelio un cometa suele tener un cambio $\Delta x \sim \sigma$ donde $\sigma \sim 10^{-4} - 10^{-3}$ ua^{-1} Si inicialmente tenemos una poblacion de cometas cuasi parabolicos ($x \sim 0$) en el primer pasaje por el sistema solar se pierde la mitad, la otra mitad continua evolucionando. Al cabo de N pasajes el valor esperado de la energia de los sobrevivientes sera $x \sim \sigma N^{1/2}$.

7.8 Estimacion del numero de cometas

Si dN/dt es el numero de cometas descubiertos por año (suponiendo que descubrimos todos los que pasan) tenemos

$$dN/dt \sim N/P \tag{170}$$

siendo N el numero total de cometas y P un periodo orbital medio.

7.9 Brillo de cometas y produccion de gas

Brillo $\propto \frac{1}{\Delta^2 r^\xi}$ donde $\xi > 2$ debido a la produccion de gas. La magnitud visual observada es

$$m_V = C - 2.5 \log B_V = M_V + 5 \log \Delta + 2\xi \log r \tag{171}$$

donde $M_V = H_{10} = m_V(r = \Delta = 1, \alpha = 0)$ es la magnitud absoluta.

La energia absorbida es igual a la suma de la emitida mas la conducida al interior mas la energia consumida en la sublimacion:

$$(1 - A)\frac{F_\odot R_\odot^2}{r^2} e^{-\tau} \pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4 \varepsilon + 4\pi R^2 K_T \frac{dT}{dz} + Q\frac{L}{N_{av}} \tag{172}$$

donde el albedo es A, τ es la profundidad optica de la coma cometaria, R el radio del nucleo, ε su emisividad, K_T su conductividad termica, L/N_{av} el calor latente de sublimacion por mol y Q la tasa de produccion de moleculas (moleculas por segundo), que para el hielo esta dada por

$$Q \sim 1.2 \times 10^{18} \frac{\pi R^2}{r^2} \tag{173}$$

donde R esta en cms y r en uas. La temperatura del nucleo suele ser inferior a la de equilibrio pues parte de la energia se la lleva la sublimacion.

8 Formacion

8.1 Masa de Jeans

Sea una nube de N particulas cada una con energia cinetica media $\mu v^2/2 = kT$. La energia cinetica total de la nube sera $\varepsilon_c = NkT = \frac{M}{\mu} kT$. El teorema del virial dice que una nube colapsa si $\mid \varepsilon_p \mid \geq 2\varepsilon_c$ de donde la condicion de colapso es

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \geq \frac{2MkT}{\mu} \tag{174}$$

que define la masa limite de Jeans:

$$M_J = \frac{10}{3} \frac{RkT}{G\mu} \tag{175}$$

Si $M > M_J$ la nube colapsa y el tiempo de colapso es el tiempo que demora una particula ubicada en la superficie ($r = R$) en caer una distancia R atraida por una masa M_J. El radio esta dado por $M_J = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ y el tiempo de colapso es la mitad del periodo orbital de la elipse rectilinea de semieje igual a $R/2$:

$$t \sim \left(\frac{3\pi}{32 G\rho} \right)^{1/2} \tag{176}$$

8.2 Disco protoplanetario

El gas orbita mas lentamente debido al efecto de la presion. La gravedad efectiva esta dada por

$$g_{ef} = -G\frac{M_\odot}{r^2} - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} \tag{177}$$

al ser menor la velocidad orbital, el gas frena los granos de polvo que caen hacia el plano y hacia el Sol.

La gravedad vertical del disco esta dada aproximadamente por

$$g_z = G\frac{M_\odot}{r^2}\frac{z}{r} \tag{178}$$

y si aplicamos equilibrio hidrostatico

$$\frac{dP}{dz} = -\rho G \frac{M_\odot}{r^3} z \tag{179}$$

y usando gas ideal con T constante tenemos $\mu dP = kTd\rho$ entonces

$$\frac{d\rho}{dz} = -\frac{\mu}{kT}\rho G\frac{M_\odot}{r^3} z \tag{180}$$

que integrando da

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-z^2/H_z^2} \tag{181}$$

donde H_z es la escala de altura Gaussiana:

$$H_z = \sqrt{\frac{2kTr^3}{\mu G M_\odot}} = v_{gas}\sqrt{\frac{r^3}{GM_\odot}} \tag{182}$$

8.3 Densidad superficial del disco

La densidad superficial se define como

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z)dz = \rho(0)H_z\sqrt{\pi} \tag{183}$$

Para obtener $\sigma(r)$ es necesario conocer $\rho(0)$ en funcion de r y en general se obtiene

$$\sigma(r) = \sigma_0 r^{\beta} \tag{184}$$

con $\beta < 0$ y $\sigma_0 = \sigma(r = 1\text{ua})$. La masa contenida en una region entre r_1 y r_2 seria:

$$m_{anillo} = \int_{r_1}^{r_2} \sigma(r) 2\pi r dr \tag{185}$$