

# TEMA 3: DINAMICA DEL SISTEMA SOLAR

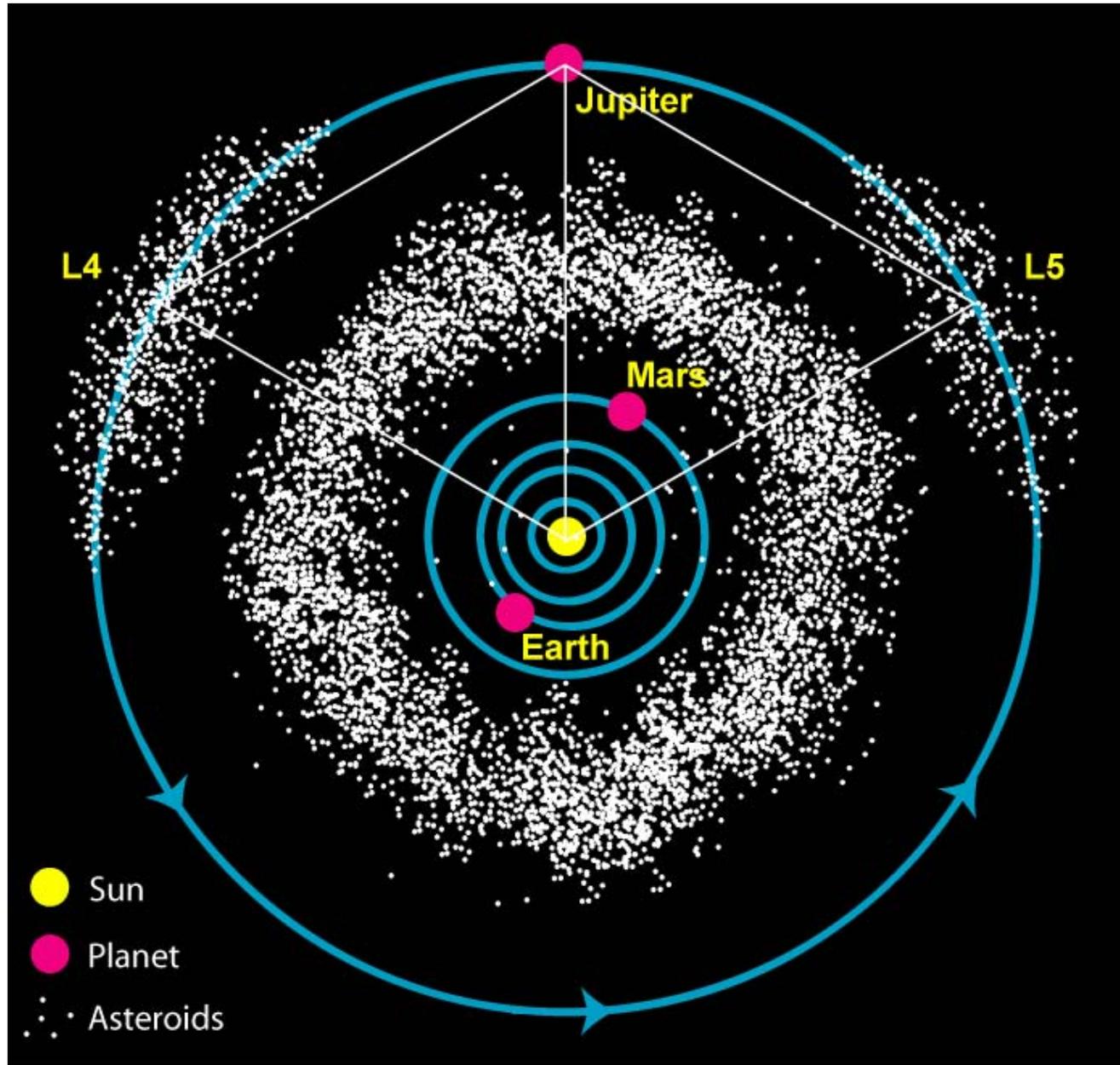
- \* Arquitectura del sistema solar. Distintas poblaciones de cuerpos menores.
- \* Ecuaciones del movimiento orbital. Perturbaciones.
- \* Mareas y límite de Roche. Esfera de Hill.
- \* Evolución secular del sistema solar. Resonancias.
- \* Perturbaciones no gravitacionales. Fuerzas asociadas a la radiación solar. Efecto Yarkovsky y YORP. Presión de la radiación. Efecto Poynting-Robertson.
- \* Fuerzas no gravitacionales en cometas.

# Cuerpos menores del sistema solar: Cometas, asteroides y objetos transneptunianos



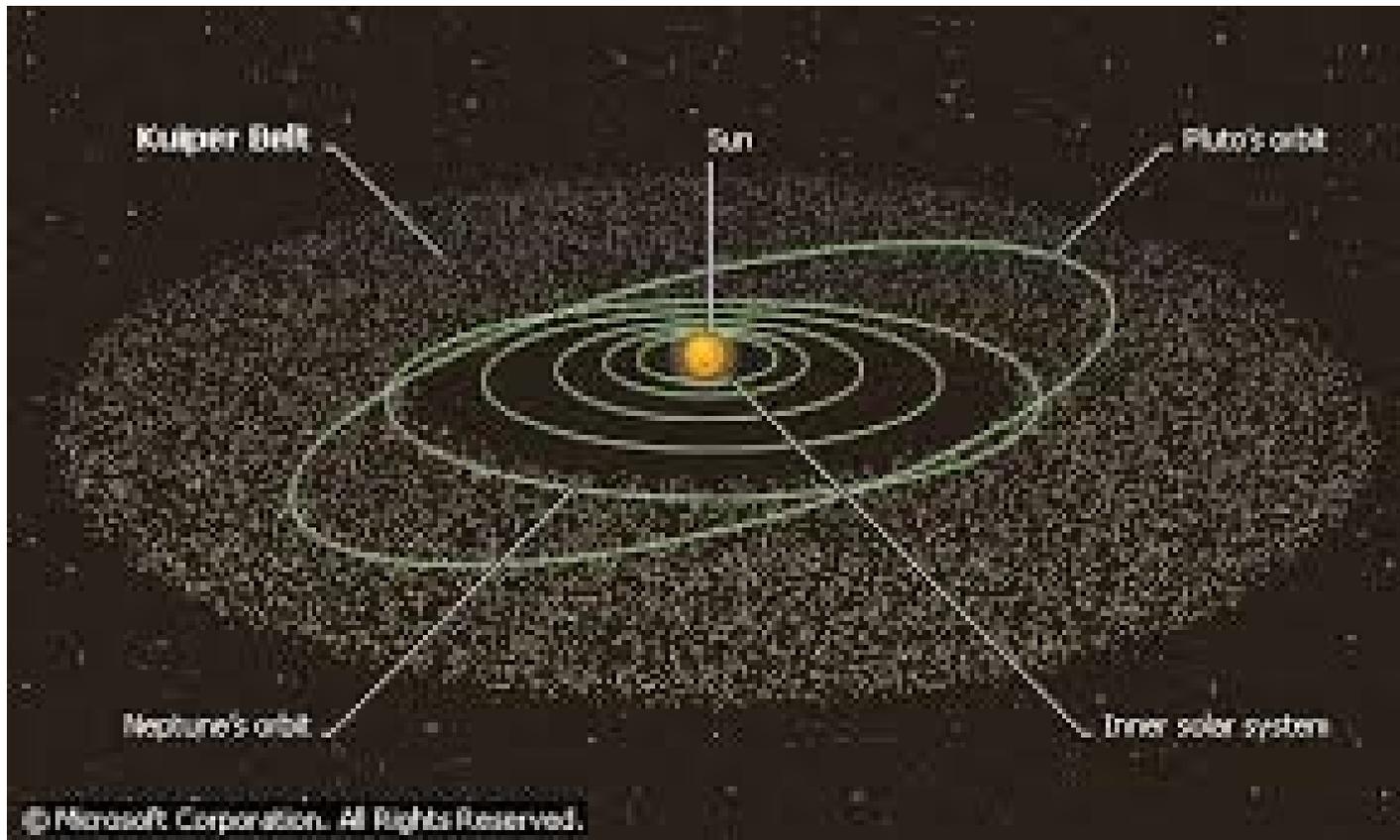
Cometa Hale-Bopp: pasó por las cercanías del Sol en 1995 y fue uno de los más espectaculares de las últimas décadas. Siendo objetos ricos en agua y materia orgánica, pueden proporcionar claves para el origen y desarrollo de la vida en la Tierra.

# El cinturón de asteroides





# El cinturón transneptuniano

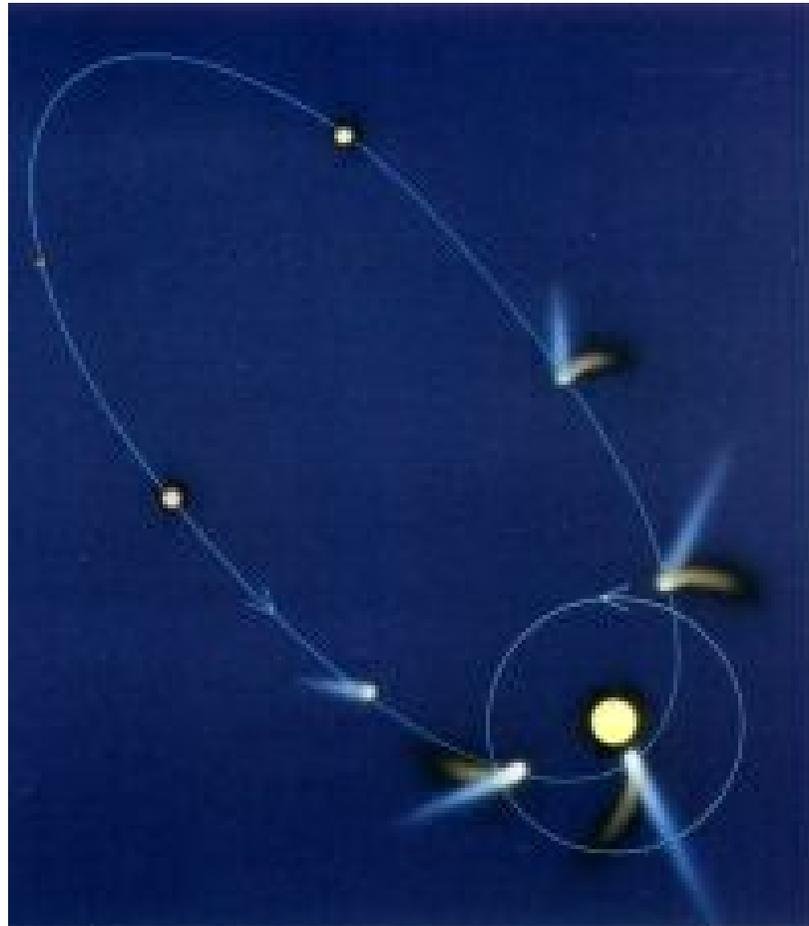


Se encuentra ubicado más allá de Neptuno entre aproximadamente 40 y 48 unidades astronómicas. El primer objeto descubierto de esta población fue el planeta enano Plutón en 1930.

# Largest known trans-Neptunian objects (TNOs)

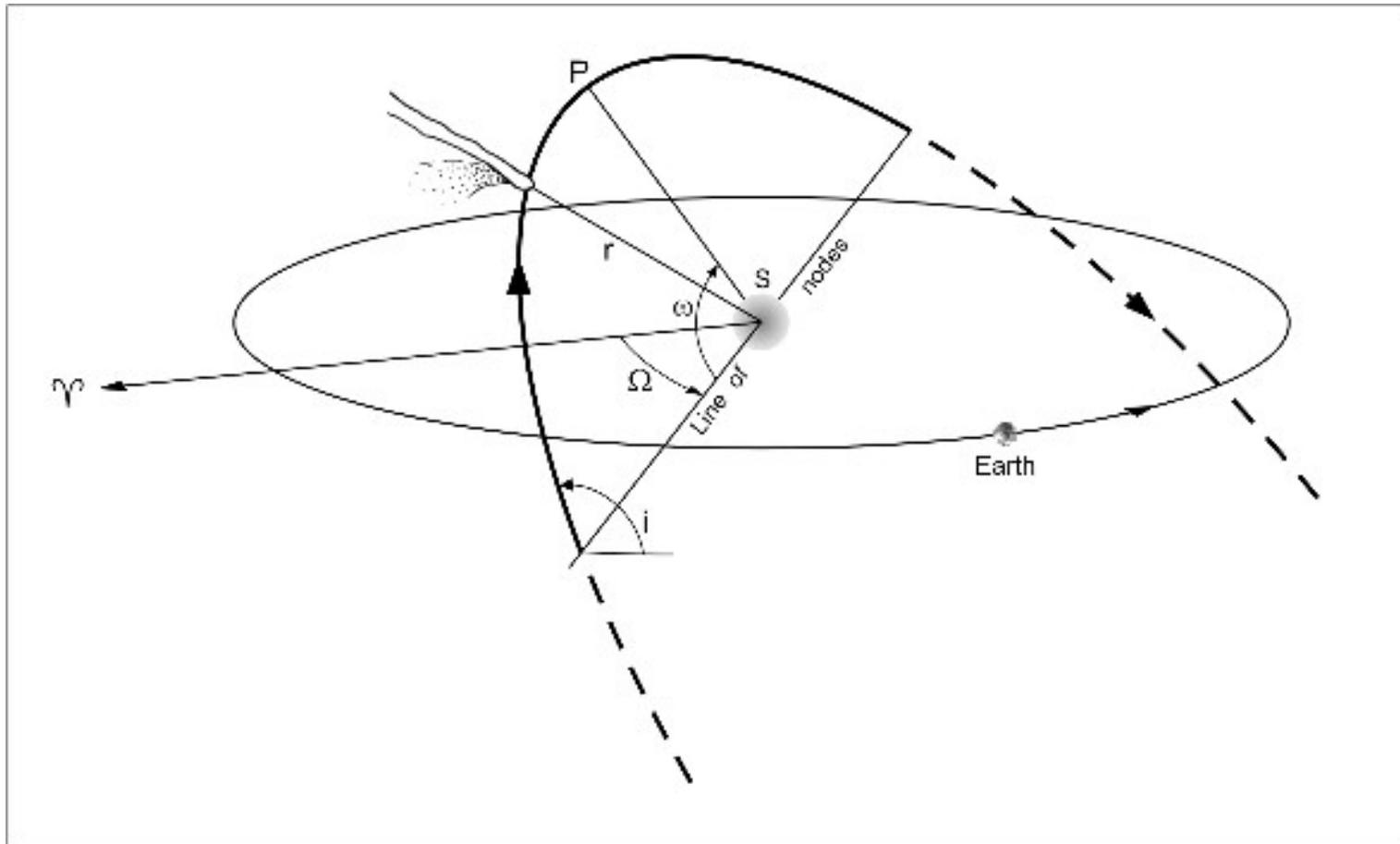


## Las órbitas de los cometas



A diferencia de las órbitas de los planetas, las órbitas de los cometas son en general muy excéntricas, lo que sugiere que vienen de grandes distancias: un reservorio cometario que se denomina *Nube de Oort*.

# Elementos orbitales



$q$ : distancia perihélica,  $a$ : semieje mayor,  $e$ : excentricidad,  $i$ : inclinación con respecto al plano de la eclíptica,  $\omega$ : argumento del perihelio,  $\Omega$ : longitud del nodo ascendente,  $\tau$ : tiempo del pasaje por el perihelio.

# Problema de 2 cuerpos: Conceptos básicos

Energía orbital:

$$E = -\frac{GM_{\odot}}{2a} \Rightarrow x \equiv \frac{1}{a}$$

$x > 0 \Rightarrow$  órbita elíptica

$x = 0 \Rightarrow$  órbita parabólica

$x < 0 \Rightarrow$  órbita hiperbólica

La velocidad de un objeto en una órbita kepleriana:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

donde  $\mu = GM_{\odot}$ .

## La órbita osculante

Es la órbita kepleriana del objeto en un instante dado. Los cambios en los elementos orbitales con el tiempo pueden ser computados por medio de la ecuación del movimiento:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_{\odot}\vec{r}}{r^3} + \nabla\mathcal{R} + A_1g(r)\vec{r} + A_2g(r)\vec{T} + A_3g(r)\vec{n}$$

$$\mathcal{R} = G \sum_i m_i \left( \frac{1}{d_i} - \frac{x_c x_i + y_c y_i + z_c z_i}{r_i^3} \right)$$

donde  $\mathcal{R}$  es la función perturbadora que toma en cuenta las perturbaciones de los planetas. Los otros términos con los coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  son las componentes de la fuerza nogravitacional (NGF) (por unidad de masa).  $g(r)$  es una función específica para el efecto considerado que depende de la distancia heliocéntrica. Más adelante analizaremos su expresión para el caso de los cometas.

# Perturbaciones en los elementos - El problema restringido de tres cuerpos

Un cuerpo moviéndose alrededor del Sol recibe perturbaciones que lo apartan de su órbita kepleriana. Si la aceleración perturbadora tiene componentes radial, transversa y normal  $(R, T, N)$ , la energía orbital varía como:

$$\frac{dE}{dt} = (R, N, T) \cdot \vec{v} = (R, N, T) \cdot (\dot{r}, r\dot{\theta}, 0) = R\dot{r} + Tr\dot{\theta}$$

La componente normal no afecta la energía orbital. Como  $E = -\mu/2a$  derivando podemos obtener la variación del semieje mayor:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{\mu} \left( R\dot{r} + T\frac{h}{r} \right)$$

donde hemos sustituido  $r^2\dot{\theta} = h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$ , donde  $h$  es el momento angular por unidad de masa.

El problema restringido de tres cuerpos consiste de 2 cuerpos masivos y un tercer cuerpo de masa despreciable. Hay una única cantidad que se conserva en el sistema que se llama la integral (o constante) de Jacobi.

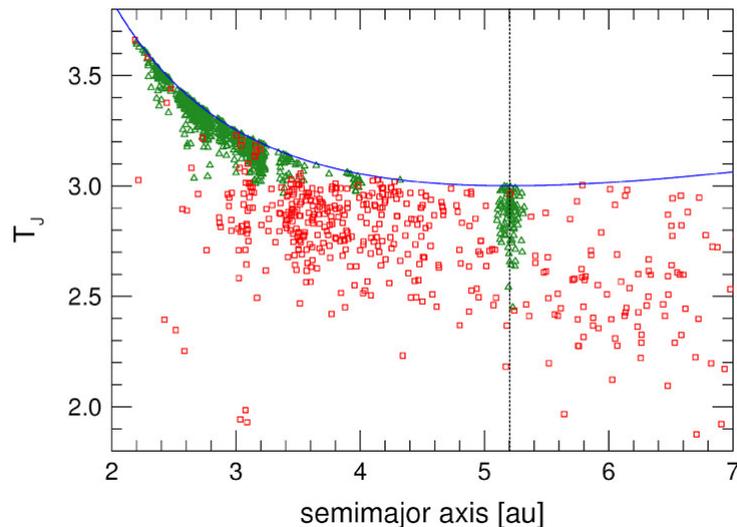
De la integral de Jacobi se deduce el parámetro (o constante) de Tisserand  $T$  del cuerpo de masa despreciable, en función de los elementos orbitales,  $q$ ,  $a$ ,  $i$ :

$$T = \frac{a_p}{a} + 2 \cos i \left[ \frac{q}{a_p} \left( 2 - \frac{q}{a} \right) \right]^{1/2}$$

La velocidad de encuentro del objeto de masa despreciable con el planeta se puede expresar en función de  $T$ :

$$U = (3 - T)^{1/2}$$

vemos que los encuentros con el planeta serán posibles sólo si  $T < 3$ .



Triángulos verdes: asteroides con magnitud absoluta  $H < 10$ .

Cuadrados rojos: Cometas de la familia de Júpiter.

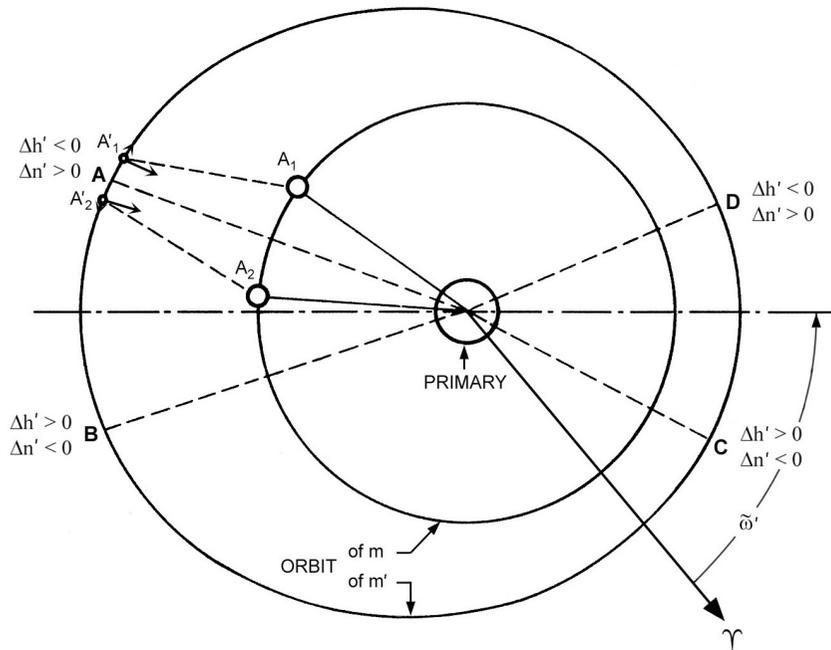
Curva azul: máximos valores de  $T_J$  para los respectivos  $a$  (asumiendo órbitas circulares con inclinación  $i = 0^\circ$ ).

# Resonancias

Sean 2 objetos de masas  $m \gg m'$   
 $m$  se mueve en una órbita circular,  $m'$   
 en una excéntrica.

Sus movimientos medios  $n$  y  $n'$  son cuasi  
 conmensurables:  $jn \simeq (j + k)n'$ ,  $j$  y  $k$   
 enteros.

Consideramos 2 posiciones simétricas en  
 torno a la conjunción:  $A_1$  y  $A'_1$ ,  $A_2$  y  $A'_2$   
 ocupadas por los objetos en  $t_A \pm \Delta t$ , donde  
 $t_A$  es el tiempo de la conjunción en  $A$ .  
 Sin embargo, como la órbita de  $m'$  es  
 excéntrica, la configuración  $A'_1 - A_1$   
 - primaria -  $A_2 - A'_2$  no es simétrica :  
 $m'$  se moverá más lento en  $A'_2$  que en  
 $A'_1 \implies$  la velocidad relativa se  
 incrementa después de la conjunción.



Antes de la conjunción  $m$  alcanza a  $m'$  viniendo de atrás  $\implies$  hay un frenado de  $m'$ .  
 Después de la conjunción  $m$  pasa a  $m'$  y la acelera : en el balance va a predominar

el efecto de frenado  $\implies m'$  perderá una cantidad de momento angular  $\Delta h'_A < 0 \implies m'$  se acercará un poco a la primaria mientras que  $m$  ganará un momento angular  $\Delta h_A = -\Delta h'_A$  y por lo tanto se alejará de la primaria.

Ya que  $n$  decrece y  $n'$  aumenta, la próxima conjunción de  $m$  con  $m'$  puede ocurrir luego del apocentro, p. ej. en B lo que haría que la deceleración antes de B fuese algo menor que la aceleración posterior, tendríamos:  $\Delta h'_B > 0 \implies m'$  ganaría algo de momento angular (decreciendo  $n'$ ), mientras que  $m$  lo perdería (aumentando  $n$ ). Como resultado, la próxima conjunción ocurrirá de nuevo antes del apocentro y así sucesivamente. **El objeto libraré en forma estable alrededor del apocentro.** La situación es similar a la de un péndulo.

Hay configuraciones que no son estables: por ejemplo se puede ver que conjunciones cerca del pericentro son inestables ya que las sucesivas conjunciones tenderían a desplazarse del pericentro, no a oscilar en torno a éste.

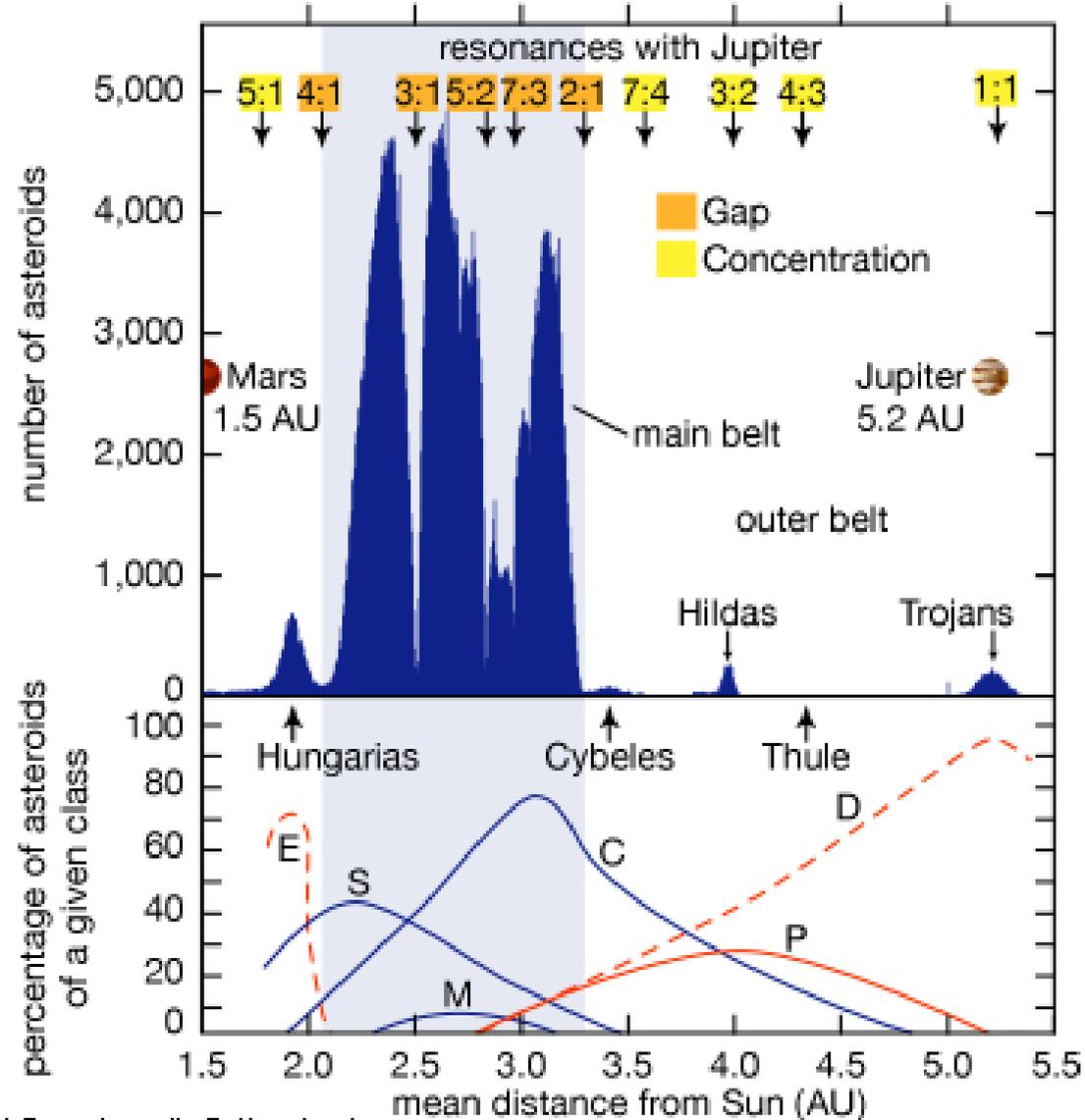
Una resonancia de movimiento medio (o conmensurabilidad) de orden  $k$  debe cumplir con la relación:

$$jn = (j + k)n'$$

No obstante, las libraciones implican que estos valores son próximos pero no iguales.

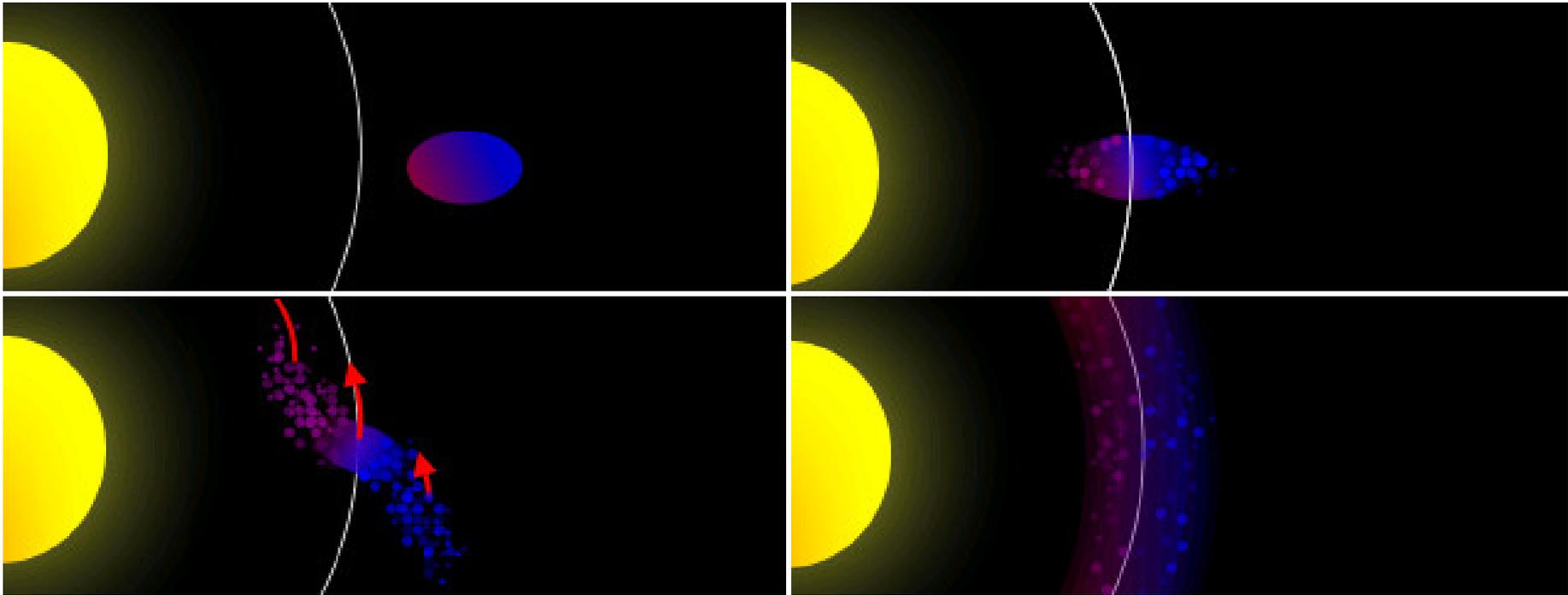
# Resonancias en el cinturón asteroidal

Asteroid distribution

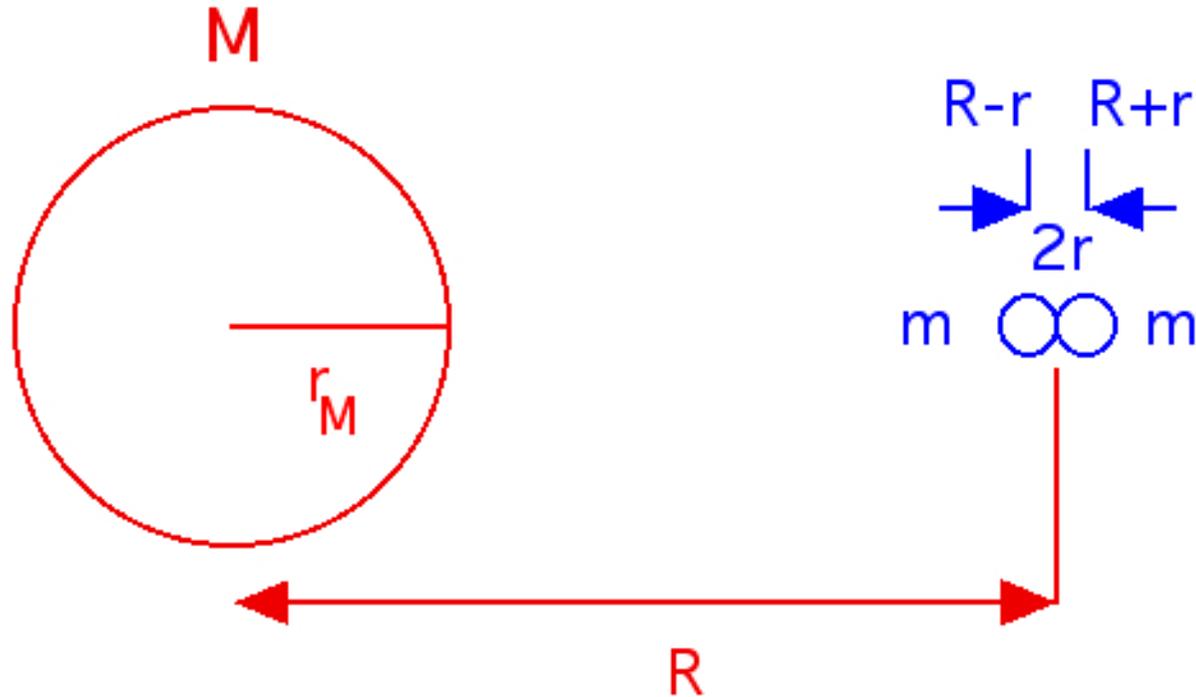


© 2014 Encyclopædia Britannica, Inc.

## El límite de Roche



La fuerza de marea del astro central actúa sobre el objeto que se acerca llegando a fragmentarlo y dispersarlo. A velocidades de encuentro bajas, los fragmentos pueden quedar gravitacionalmente ligados formando un anillo alrededor del astro central.



2 partículas de masa  $m$  y radio  $r$  con un punto de contacto, que orbitan un planeta de masa  $M$ , serán separadas si la fuerza de marea del planeta  $\Delta F$  (diferencia de las fuerzas gravitacionales ejercidas por el planeta sobre las partículas a distancias  $R - r$  y  $R + r$ ) supera su atracción mutua  $F$  es decir:

$$F < \Delta F$$

$\implies$

$$\frac{Gm^2}{(2r)^2} < \frac{GmM}{(R-r)^2} - \frac{GmM}{(R+r)^2}$$

En el caso que  $m \ll M$  (o  $r \ll R$ ), nos queda como condición para que las partículas se separen como resultado de la fuerza de marea que alcancen una distancia al planeta:

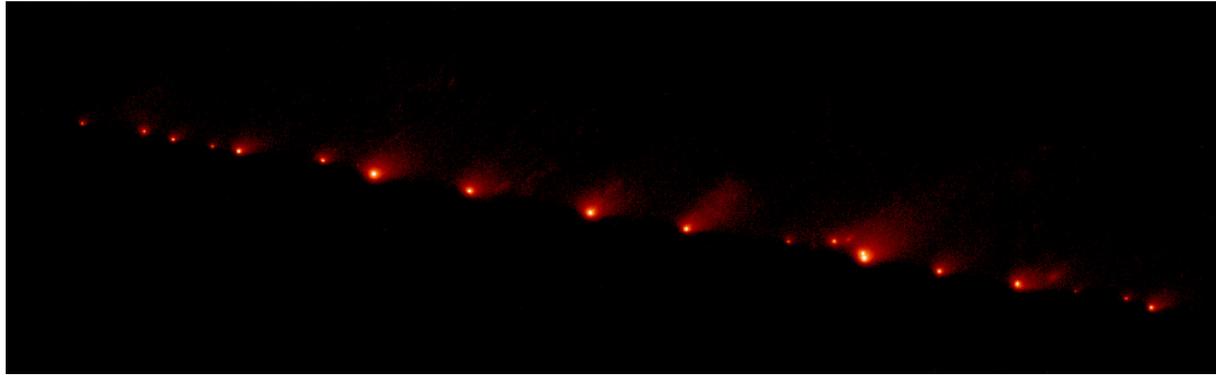
$$R \lesssim 2.5r \left( \frac{M}{m} \right)^{1/3}$$

El límite de Roche corresponde a la condición límite  $\Delta F = F$  es decir  $R_{Roche} \sim 2.5r \left( \frac{M}{m} \right)^{1/3}$ . Si introducimos las densidades del planeta y objeto :  $m = \rho_m \times 4\pi \times r^3/3$  y  $M = \rho_M \times 4\pi \times r_M^3/3$  nos queda:

$$R_{Roche} \sim 2.5r_M \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3}$$

donde  $r_M$  es el radio del planeta.

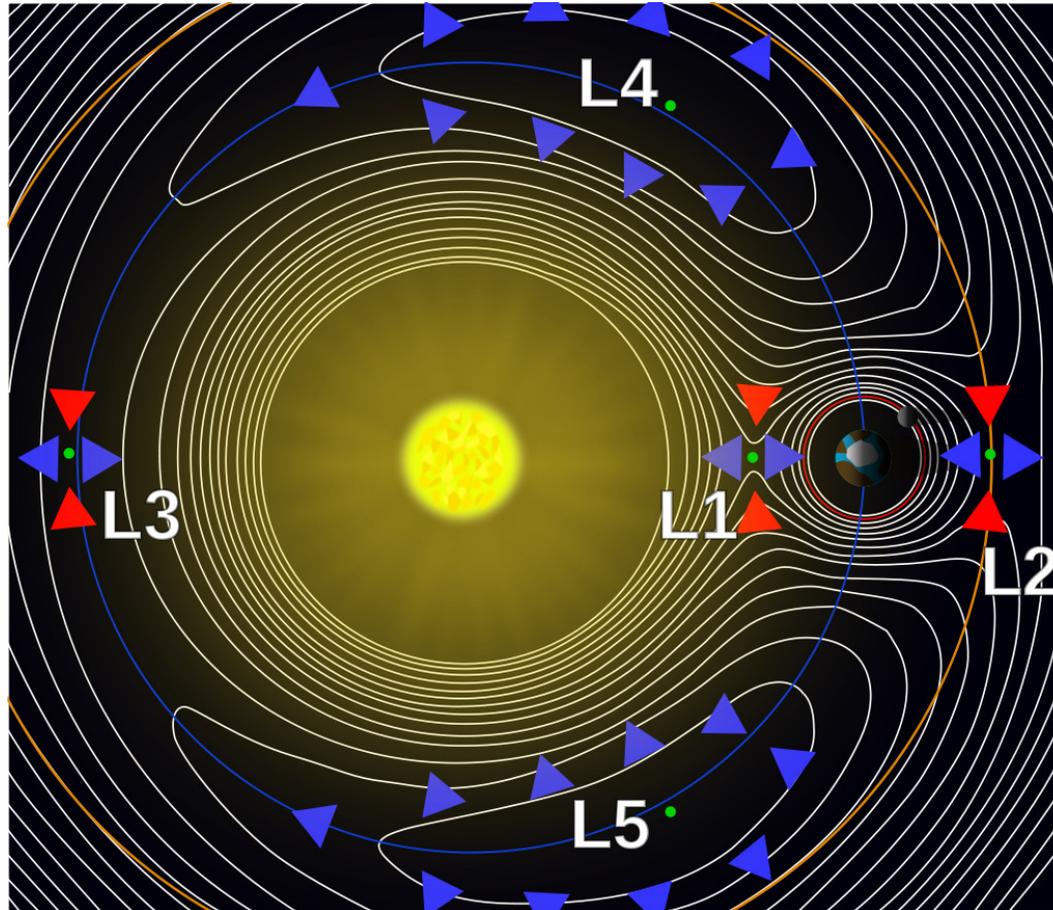
## Ejemplo de fragmentación de un cometa por fuerza de marea: D/1993 F2 (Shoemaker-Levy 9)



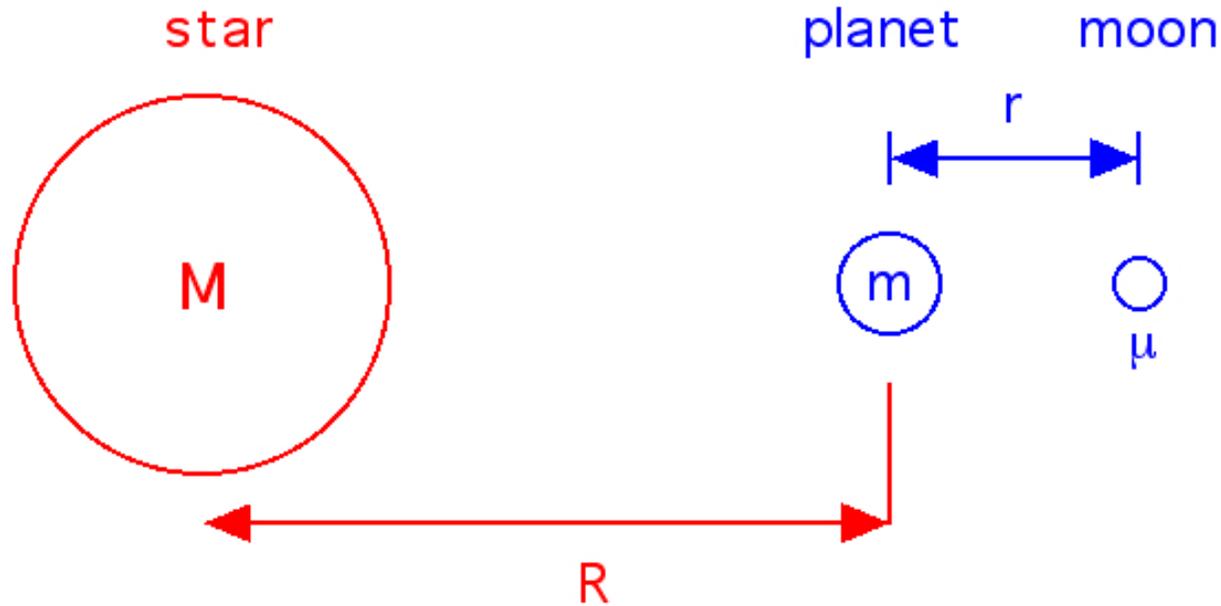
El cometa se fragmentó en un encuentro con Júpiter formando un tren de fragmentos (foto superior del HST). En un encuentro posterior los fragmentos chocaron con Júpiter dejando las manchas que se observan en su atmósfera.

# La esfera de Hill

\* En el problema restringido de 3 cuerpos, los puntos de Lagrange indican las posiciones donde las fuerzas gravitacionales combinadas de los 2 objetos masivos proveen exactamente la fuerza centrífuga requerida para que una partícula en uno de esos puntos orbite solidariamente con las 2 masas.



Consideremos el caso de una estrella (masa  $M$ ), planeta (masa  $m$ ) y satélite (masa  $\mu$ ) en la configuración de la figura.



La fuerza centrífuga requerida para que el satélite gire solidariamente con las masas  $M$  y  $m$  es:

$$\mu\omega^2(R + r) = \frac{G\mu M}{(R + r)^2} + \frac{G\mu m}{r^2}$$

donde  $\omega^2 = GM/R^3$  es la velocidad de rotación del sistema.

Sustituyendo  $\omega^2$  en la ecuación anterior queda:

$$\frac{G\mu M(R+r)}{R^3} = \frac{G\mu M}{(R+r)^2} + \frac{G\mu m}{r^2}$$

que conduce a

$$mR^3(R+r)^2 = Mr^3 + (3R^2 + 3Rr + r^2)$$

Para  $r \ll R$  la ecuación se simplifica:

$$mR^3 = 3Mr^3$$

De aquí obtenemos el radio de Hill:

$$r_{Hill} = \left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3} R$$

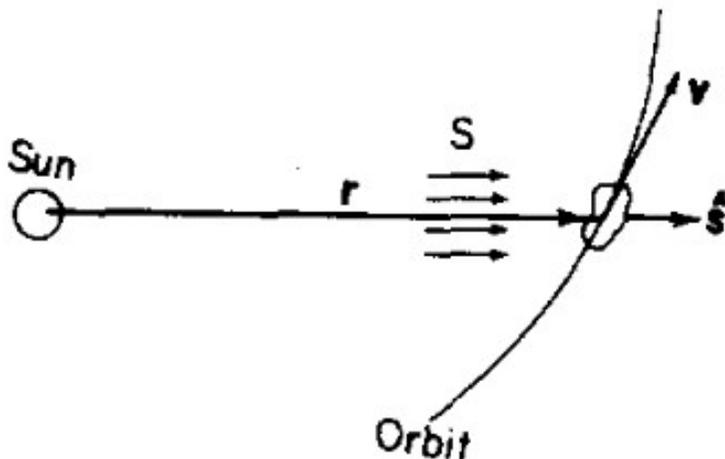
# Fuerzas asociadas a la radiación solar

## PRESION DE LA RADIACION

Se debe a la intercepción inicial por la partícula del momento lineal incidente asociado la radiación.

## EFECTO POYNTING-ROBERTSON

Es un término resistente debido a la tasa efectiva de pérdida de masa de la partícula en movimiento a medida que reradia la energía incidente.



Una partícula perfectamente absorbente, estacionaria, de sección eficaz  $A$ , interceptaría (por segundo) de un flujo  $F$  una cantidad de energía  $FA$ . Si la partícula se mueve con respecto al Sol con velocidad  $\vec{v}$ , debemos remplazar  $F$  por:  $F' = F \left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right)$  donde  $\dot{r} = \vec{v} \cdot \hat{s}$  es la velocidad radial,  $\hat{s}$  el radio vector unitario, y  $c$  la velocidad de la luz.

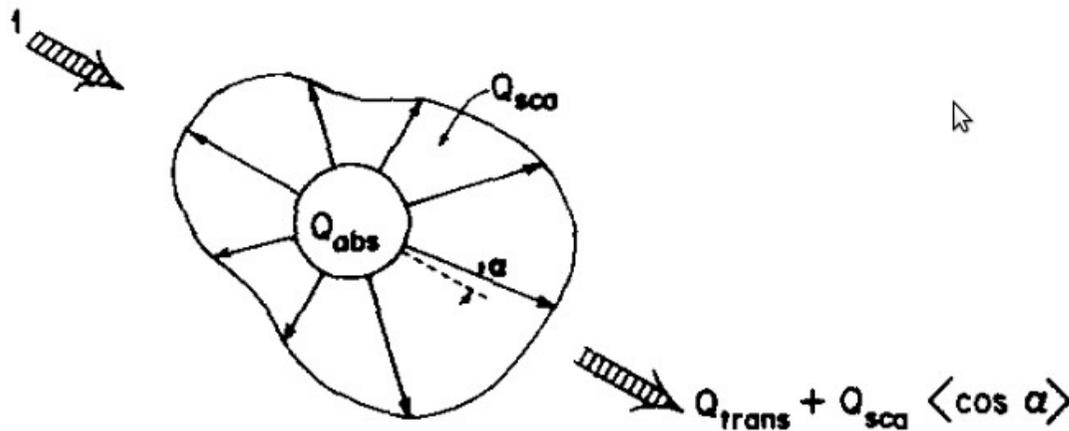
# La ecuación del movimiento bajo las fuerzas asociadas a la radiación solar

Consideremos una partícula de masa  $m$  perfectamente absorbente, la ecuación del movimiento es:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( \frac{F' A}{c} \right) \hat{s} - \left( \frac{F' A}{c^2} \right) \vec{v} \simeq \left( \frac{F A}{c} \right) \left[ \left( 1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \hat{s} - \frac{\vec{v}}{c} \right]$$

correcta dentro de términos del orden  $v/c$ .

En el caso general, parte de la luz será absorbida por la partícula y parte difundida. Se definen los coeficientes de difusión  $Q_{sca}$  y absorción  $Q_{abs}$ :



$\alpha$  : ángulo de difusión

Consideremos que la difusión es simétrica con respecto a la dirección del haz incidente (o sea solo depende de  $\alpha$ ). Si  $f(\alpha)$  es la función de fase de la partícula, el parámetro de anisotropía va a estar dado por:

$$\langle \cos \alpha \rangle = \int_0^\pi f(\alpha) \cos \alpha 2\pi \sin \alpha d\alpha$$

Se define el coeficiente de presión de la radiación  $Q_{pr}$  como:

$$Q_{pr} \equiv Q_{abs} + Q_{sca}(1 - \langle \cos \alpha \rangle)$$

Este factor multiplica el flujo de cantidad de movimiento incidente. Si tuviésemos una difusión hacia adelante perfecta, entonces  $\langle \cos \alpha \rangle = 1 \implies Q_{pr} = Q_{abs}$ . Para difusión hacia atrás perfecta:  $Q_{pr} = Q_{abs} + 2Q_{sca}$ .

La fuerza neta sobre la partícula debida a las fuerzas asociadas a la radiación solar queda entonces :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \left( \frac{FA}{c} \right) Q_{pr} \left[ \left( 1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \hat{s} - \frac{\vec{v}}{c} \right]$$

Notemos que para una partícula totalmente absorbente  $Q_{pr} = 1$ .

La ecuación anterior la podemos descomponer en una componente radial y una transversa:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \left( \frac{FA}{c} \right) Q_{pr} \left[ \left( 1 - 2\frac{\dot{r}}{c} \right) \hat{s} - \left( \frac{r\dot{\theta}}{c} \right) \hat{\theta} \right]$$

Los términos que dependen de  $v$  dan la resistencia de Poynting-Robertson, mientras que el primer término radial es la fuerza de la presión de la radiación.

## Definición de $\beta$ en función de $Q_{pr}$

Consideremos una partícula de polvo de radio  $s$  y densidad  $\rho$  a una distancia  $r$  del Sol. La fuerza de atracción gravitatoria del Sol sobre la partícula es:

$$F_G = \frac{4/3\pi s^3 \rho G M_\odot}{r^2}$$

La fuerza de la presión de la radiación es:

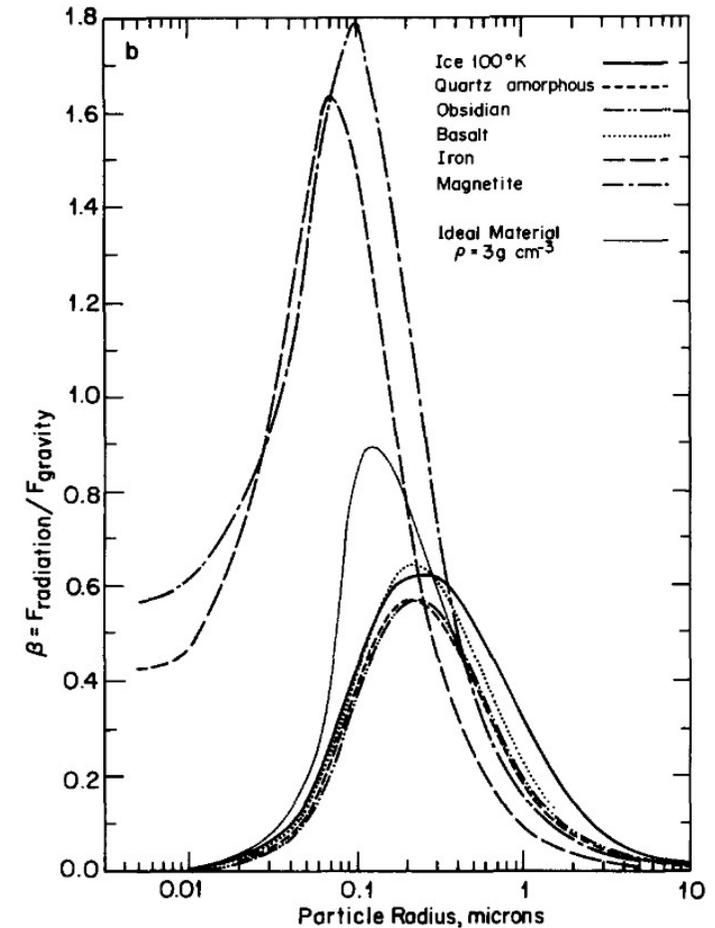
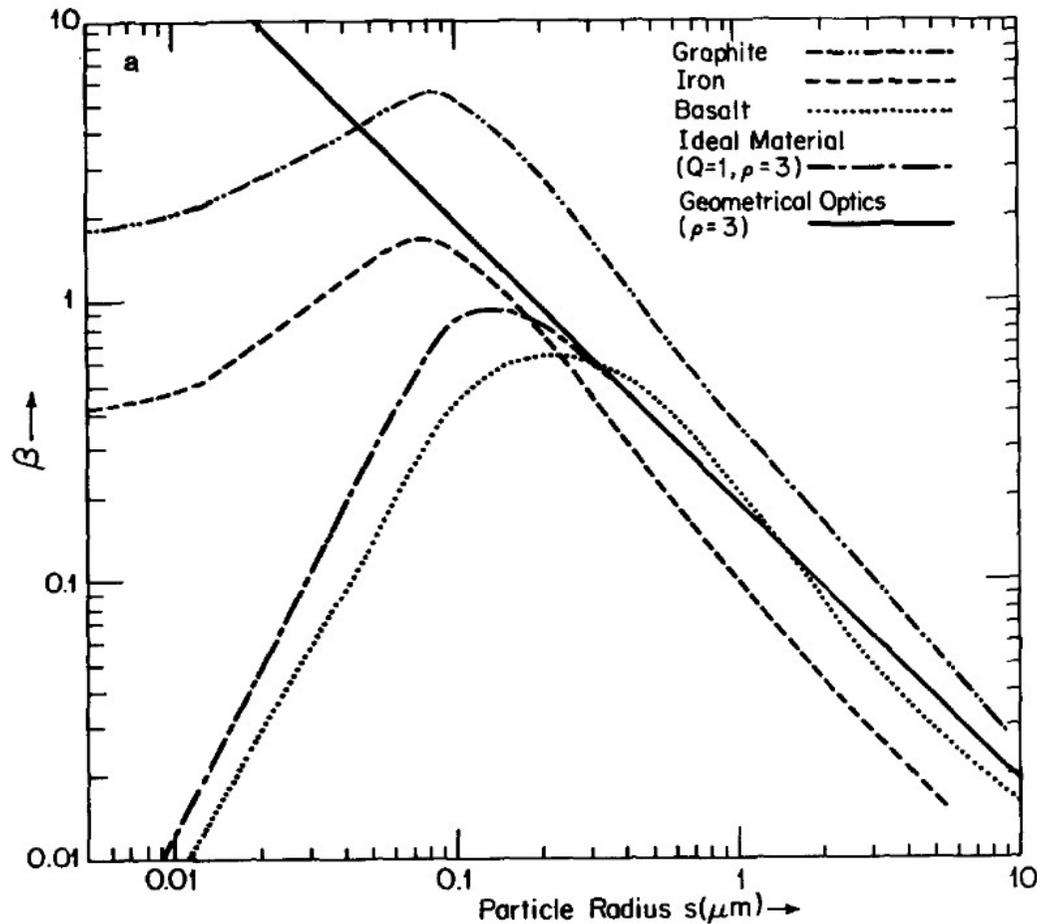
$$F_R = \left( \frac{F A}{c} \right) Q_{pr}$$

donde  $F = c_\odot r_o^2 / r^2$  y  $r_o = 1.496 \times 10^{13}$  cm.

Definimos el coeficiente  $\beta$  como:

$$\beta \equiv \frac{F_R}{F_G} = \frac{3c_\odot r_o^2 / 4GM_\odot c}{Q_{pr} / \rho s} = 5.7 \times 10^{-5} \frac{Q_{pr}}{\rho s} \quad (\rho \text{ y } s \text{ en el sistema cgs})$$

# Evaluación de $\beta$ para distintos materiales y tamaños



$\beta/Q_{pr} \sim 1$  para partículas de  $s \sim 0.5 \mu\text{m}$  que es del mismo orden que la longitud de onda del máximo de radiación solar.

# Efectos dinámicos de la fuerza de la presión de la radiación y de la resistencia de Poynting-Robertson

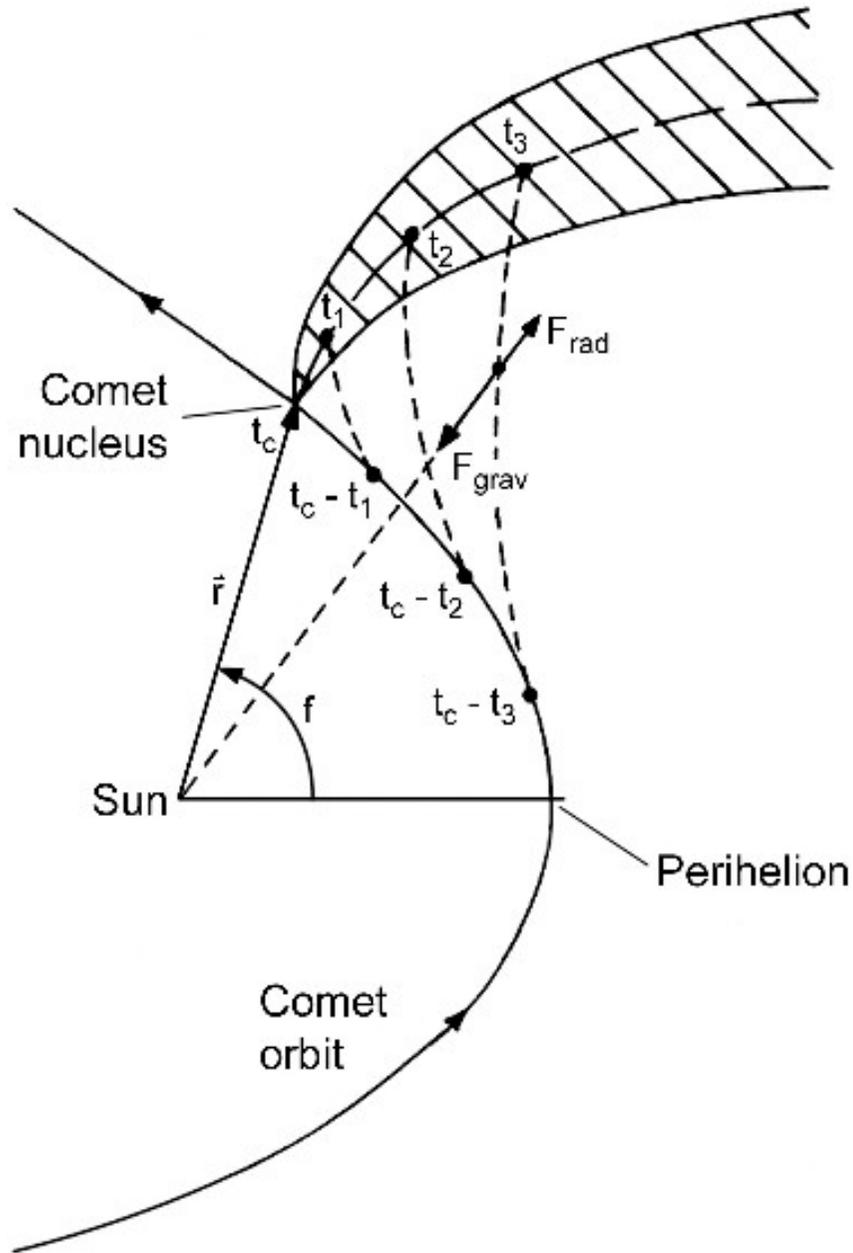
Ya que la fuerza de la presión de la radiación sigue la dirección radial y varía como  $r^{-2}$ , la ecuación del movimiento queda:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -(1 - \beta)\frac{\mu\hat{s}}{r^2}$$

donde  $\mu \equiv GM_{\odot}$ .

- \* Para  $\beta < 1$  la fuerza sigue siendo atractiva  $\implies$  órbitas elípticas, parabólicas o hiperbólicas serán posibles.
- \* Para  $\beta > 1$  la fuerza neta es repulsiva  $\implies$  sólo órbitas hiperbólicas son posibles.

# Aplicación a la formación de la cola cometaria de polvo



Las partículas de polvo eyectadas en distintos puntos de la órbita recorrerán trayectorias crecientemente divergentes de la órbita del cometa.

## La resistencia de Poynting-Robertson

Este efecto decrece tanto el semieje mayor  $a$  como la excentricidad  $e$ . Las componentes radial y transversa de la resistencia P-R están dadas por:

$$F_R = -2 \left( \frac{F A Q_{pr}}{m c^2} \right) \dot{r}$$

$$F_T = - \left( \frac{F A Q_{pr}}{m c^2} \right) r \dot{\theta}$$

Como no hay componente normal, no hay cambio en la inclinación de la partícula.

Para el cálculo de las variaciones en  $a$  y  $e$  debido a las perturbaciones  $F_R$  y  $F_T$  podemos usar las ecuaciones de Gauss:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left( F_R e \sin f + F_T \frac{p}{r} \right)$$
$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} [F_R \sin f + F_T (\cos E + \cos f)]$$

donde  $f$  es la anomalía verdadera,  $E$  la anomalía excéntrica,  $n$  el movimiento medio y  $p = a(1 - e^2)$ .

A partir de este sistema de ecuaciones diferenciales, promediando en el tiempo las perturbaciones, llegamos a una expresión para el tiempo de decaimiento característico de una partícula de radio  $s$  y densidad  $\rho$ , asumiendo que la excentricidad  $e = 0$  :

$$t_{P-R} = \frac{a^2}{4\eta Q_{pr}}$$

donde  $\eta = 2.53 \times 10^{11} / \rho s$  en unidades cgs.

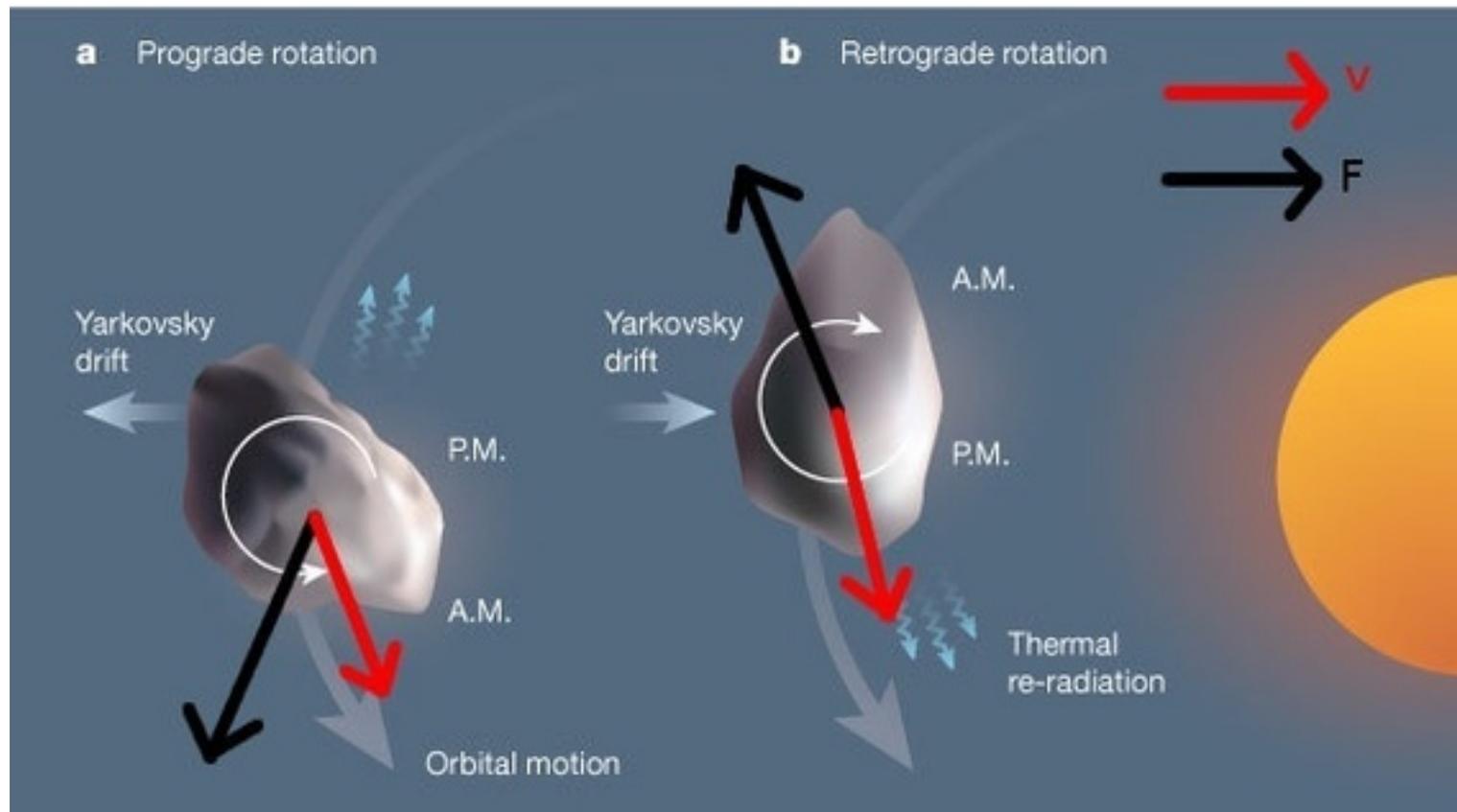
EJEMPLO: Consideremos una partícula de radio  $s = 1$  cm y densidad  $\rho = 3$  g cm<sup>-3</sup> moviéndose en una órbita circular de radio  $a = 1$  ua. ¿Cuánto tiempo demoraría la partícula en caer en el Sol por la resistencia de Poynting-Robertson?

RESULTADO:  $a = 1$  ua =  $1.5 \times 10^{13}$  cm, asumimos  $Q_{pr} = 1$ .

$$t_{P-R} = \frac{(1.5 \times 10^{13})^2 \times 3 \times 1}{4 \times 2.53 \times 10^{11}} = 6.67 \times 10^{14} \text{ s} = 2.1 \times 10^7 \text{ años}$$

## El efecto Yarkovsky

Se debe al desplazamiento de la dirección radial de la radiación térmica re-emitida por un meteoroide o un pequeño asteroide que no es isotérmico y que tiene una cierta inercia térmica (objetos de dimensiones entre m y algunos km). Dependiendo del sentido de rotación del asteroide, el efecto lo puede tanto acelerar como frenar.



Veamos una derivación simple del efecto Yarkovsky: El hemisferio diurno de un objeto de radio  $R$  recibe la radiación solar alcanzando una temperatura de equilibrio (asumamos el caso de un rotador lento):

$$T = \frac{T_{\odot} R_{\odot}^{1/2} (1 - A_v)^{1/4}}{2^{1/4} r^{1/2}}$$

La emisión termica del hemisferio diurno durante un tiempo  $\Delta t$  estará dada por:

$$\epsilon = \sigma T^4 2\pi R^2 \Delta t$$

Pero si hay una diferencia de temperatura  $\Delta T$  entre la mañana y la tarde debido a la inercia térmica, la diferencia de energía térmica emitida será:

$$\Delta\epsilon \sim \frac{d\epsilon}{dT} \Delta T = 4\sigma T^3 2\pi R^2 \Delta T \Delta t$$

La transferencia de momento lineal durante  $\Delta t$  será del orden:

$$\frac{\Delta\epsilon}{c} = M \Delta v$$

donde  $M = 4/3\pi R^3 \rho$  es la masa del objeto y  $\rho$  su densidad.

Si asumimos que el objeto se mueve en una órbita de baja excentricidad ( $e \sim 0$ ), su velocidad orbital estará dada por:

$$v \simeq \left( \frac{GM_{\odot}}{a} \right)^{1/2} \implies \Delta v = -\frac{1}{2} \left( \frac{GM_{\odot}}{a^3} \right)^{1/2} \Delta a$$

Combinando con la ecuación anterior (dejando de lado el signo de menos) nos queda :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{GM_{\odot}}{a^3} \right)^{1/2} \Delta a = \frac{\Delta \epsilon}{Mc} = \frac{4\sigma T^3 2\pi R^2 \Delta T \Delta t}{Mc}$$

Vamos a introducir la luminosidad solar:  $L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4$ , de aquí nos queda:

$$4\pi\sigma T^4 = \frac{L_{\odot}(1 - A_v)}{2a^2}$$

donde hemos asumido que la distancia heliocéntrica  $r \sim a$ . Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior nos queda:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{GM_{\odot}}{a^3} \right)^{1/2} \Delta a = \frac{L_{\odot}(1 - A_v)2R^2(\Delta T/T)\Delta t}{2a^24/3\pi R^3\rho c}$$

La tasa de cambio del semieje mayor,  $\Delta a/a$ , debida al efecto Yarkovsky, queda entonces:

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{3}{2\pi} \times \frac{L_{\odot}}{c(GM_{\odot})^{1/2}} \times (1 - A_v) \frac{\Delta T}{T} \times \frac{1}{a^{1/2}} \times \frac{1}{R\rho}$$

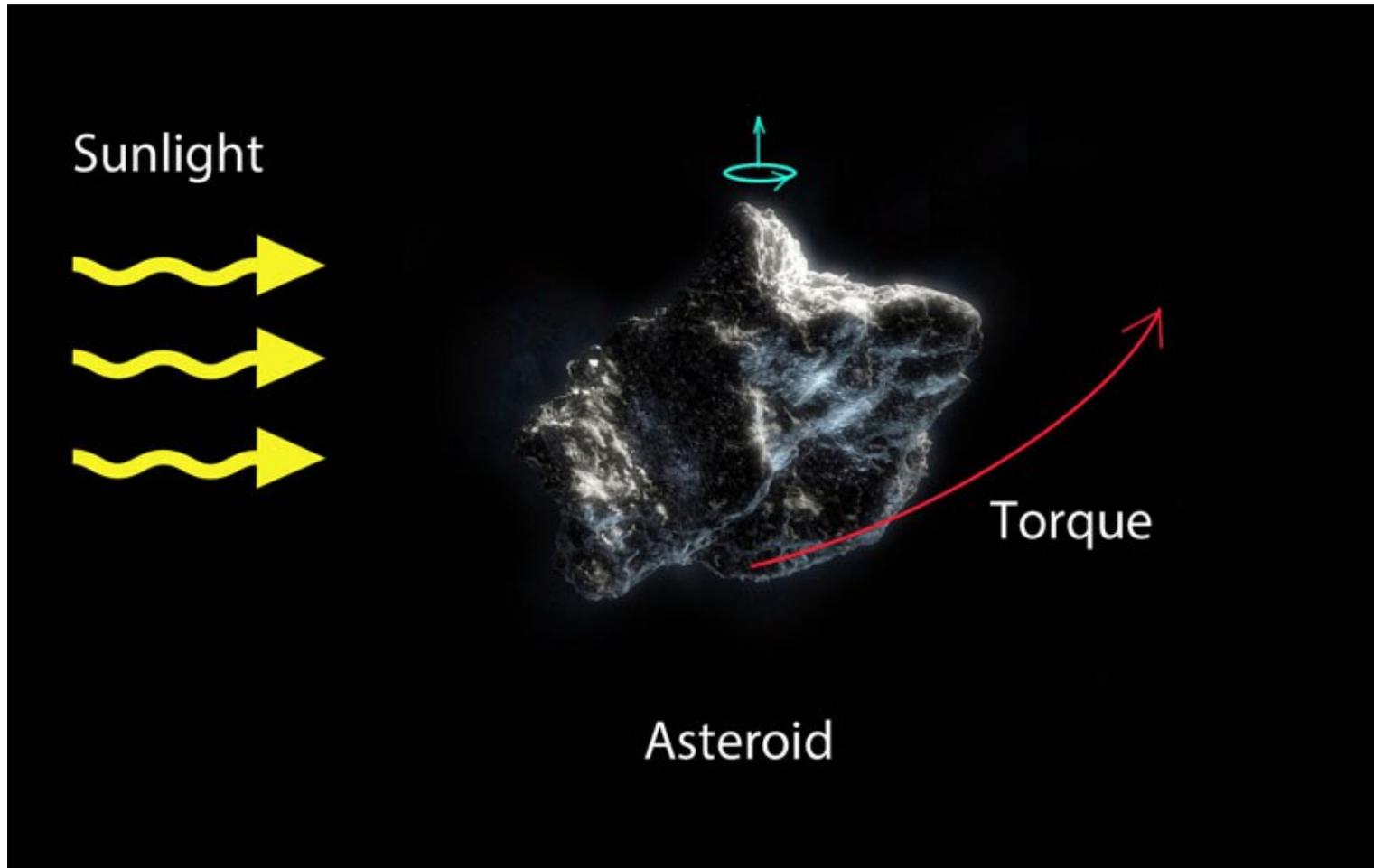
El factor  $(1 - A_v)\Delta T/T$  viene a ser como un factor de eficiencia, análogo al factor  $f_Y$  utilizado por Nugert et al. (2014, *Astrophys. J.* 144:60(13pp)). La máxima eficiencia sería  $f_Y = 1$  para  $A_v = 0$  y  $\Delta T = T$ .

EJEMPLO: ¿Cuál sería la tasa de cambio del semieje mayor (en ua /  $10^6$  años) para un asteroide de radio  $R = 1$  km, densidad  $\rho = 3$  g cm $^{-3}$ , con un semieje mayor  $a = 2.5$  ua?  
Nota: Se asume que  $\Delta T = 0.1T$  y que  $(1 - A_v) \sim 1$ .

RESULTADO:  $\Delta a/\Delta t = 6.27 \times 10^{-4}$  ua /  $10^6$  años (este resultado es consistente con algunos desplazamientos observados en asteroides.)

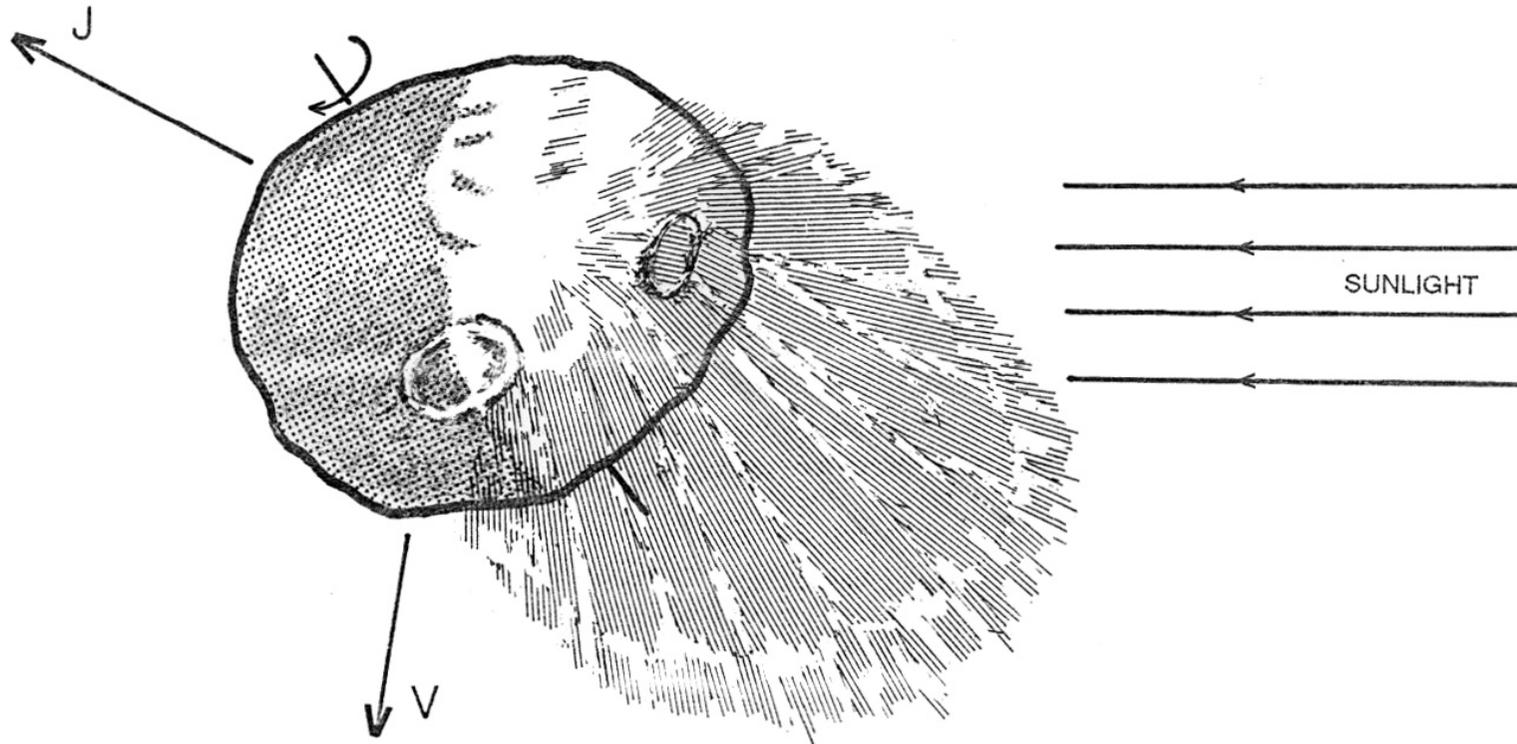
## El efecto YORP

El efecto Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack (YORP) es una variación de segundo orden del efecto Yarkovsky que cambia la orientación de spin y el período de rotación de un pequeño objeto de forma irregular.



## Fuerzas nongravitacionales en cometas

Los gases producidos por la sublimación de los hielos dan lugar a una fuerza neta en la dirección opuesta al máximo de emisión gaseosa. Debido a la inercia térmica, la zona de máxima emisión en un núcleo rotante se desplazará con respecto al punto sub-solar.



Como vimos antes, la ecuación del movimiento se puede describir agregando 3 términos con coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  que toman en cuenta esta fuerza. Usualmente, adoptamos  $A_3 = 0$ . La función  $g(r)$  se puede describir por medio de la siguiente expresión:

$$g(r) = \alpha \left( \frac{r}{r_o} \right)^{-m} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_o} \right)^n \right]^{-k}$$

donde  $\alpha = 0.1113$  es un factor de normalización tal que  $g(1) = 1$ ,  $m = 2.15$ ,  $n = 5.093$ ,  $k = 4.6142$  y  $r_o = 2.808$  ua (Marsden, Sekanina & Yeomans 1973).