1 Solucion universal del problema de 2 cuerpos

A partir de las ecuaciones de Binet hemos resuelto la trayectoria $r(\theta)$ pero ahora nos interesa obtener la dependencia con el tiempo $r(t), \theta(t)$. Defino τ tal que

$$d\tau = \frac{1}{r} dt \tag{1}$$

siendo en el periastro $\tau(t = T) = 0$. Entonces

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \dot{r}r \tag{2}$$

y tambien operando se llega a

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = r\dot{r}^2 + r^2\ddot{r} \tag{3}$$

Expresaremos $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ en funcion de r. Como

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \tag{4}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \tag{5}$$

$$h^2 = (r^2\dot{\theta})^2 \tag{6}$$

resulta:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{r^2} - \frac{\mu}{r} \tag{7}$$

Ademas la expresion de la aceleracion radial es

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{8}$$

entonces

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{r^2} - \frac{\mu}{r^2} \tag{9}$$

de donde 3 queda

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = 2\varepsilon r + \mu \tag{10}$$

Esta es ahora la ecuacion de movimiento para $r(\tau)$ con las condiciones iniciales:

$$r(\tau = 0) = q \tag{11}$$

$$\frac{dr}{d\tau}(\tau = 0) = r\dot{r} = 0 \tag{12}$$

La solucion de 10 depende de si $\varepsilon \lesseqqgtr 0$ siendo la energia orbital $\varepsilon = -\mu/2a$.

1.1 Caso $\varepsilon = 0$, orbita parabolica, $1/a = 0$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = 0 + \mu \tag{13}$$

integrando

$$r = \frac{\mu}{2}\tau^2 + \alpha\tau + \beta \tag{14}$$

siendo

$$r(\tau = 0) = q = \beta \tag{15}$$

$$\frac{dr}{d\tau}(\tau = 0) = 0 = \alpha \tag{16}$$

y la solucion queda

$$r = \frac{\mu}{2}\tau^2 + q \tag{17}$$

Como teniamos $dt = r d\tau$, integramos:

$$\int_T^t dt = \int_0^\tau (\frac{\mu}{2}\tau^2 + q) d\tau \tag{18}$$

$$(t - T) = \frac{\mu}{6}\tau^3 + q\tau \tag{19}$$

El pasaje por el periastro T queda definido con las condiciones iniciales $t, \vec{r}, \vec{v}$. Entonces dado un instante generico $t \longrightarrow \tau \longrightarrow r \longrightarrow \theta$ y la posicion (r, θ) queda definida.

1.2 Caso $\varepsilon \neq 0$

La solucion de 10 es

$$r = -\frac{\mu}{2\varepsilon} + \alpha \exp(\tau\sqrt{2\varepsilon}) + \beta \exp(-\tau\sqrt{2\varepsilon}) \tag{20}$$

siendo

$$r(\tau = 0) = q = -\frac{\mu}{2\varepsilon} + \alpha + \beta = a + \alpha + \beta = a(1-e) \tag{21}$$

$$\frac{dr}{d\tau}(\tau = 0) = 0 = \alpha\sqrt{2\varepsilon} - \beta\sqrt{2\varepsilon} \tag{22}$$

de donde

$$\alpha = \beta = -\frac{ae}{2} \tag{23}$$

y la solucion queda

$$r = a\left[1 - e\frac{\left(\exp(\tau\sqrt{2\varepsilon}) + \exp(-\tau\sqrt{2\varepsilon})\right)}{2}\right] \tag{24}$$

1.2.1 Caso $\varepsilon < 0$, $a > 0$, orbita eliptica

En este caso tenemos

$$\frac{\exp(\tau\sqrt{2\varepsilon}) + \exp(-\tau\sqrt{2\varepsilon})}{2} = \frac{\exp(i\tau\sqrt{2\mid\varepsilon\mid}) + \exp(-i\tau\sqrt{2\mid\varepsilon\mid})}{2} = \cos(\tau\sqrt{2\mid\varepsilon\mid}) \tag{25}$$

de donde si definimos

$$E \equiv \tau\sqrt{2|\varepsilon|} = \tau\sqrt{\mu/a} \tag{26}$$

obtenemos la conocida ecuacion

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{27}$$

y si integramos obtenemos

$$\int_T^t dt = \int_0^\tau r d\tau = \int_0^E r\frac{dE}{\sqrt{\mu/a}} = \frac{a}{\sqrt{\mu/a}}(E - e\sin E) \tag{28}$$

se donde surge la ecuacion de Kepler

$$n(t-T) = E - e\sin E \tag{29}$$

con $n = \sqrt{\mu/a^3}$ y siendo E la anomalia excentrica. Dado un instante $t \longrightarrow E \longrightarrow r \longrightarrow \theta$ y la posicion (r,θ) en la elipse queda definida.

1.2.2 Caso $\varepsilon > 0$, $a < 0$, orbita hiperbolica

En este caso tenemos

$$\frac{\left(\exp(\tau\sqrt{2\varepsilon}) + \exp(-\tau\sqrt{2\varepsilon})\right)}{2} = \cosh(\tau\sqrt{2\varepsilon}) \tag{30}$$

de donde si definimos

$$F \equiv \tau\sqrt{2\varepsilon} = \tau\sqrt{-\mu/a} \tag{31}$$

obtenemos la conocida ecuacion

$$r = a(1 - e\cosh F) \tag{32}$$

y si integramos obtenemos

$$\int_T^t dt = \int_0^\tau r d\tau = \int_0^F r\frac{dF}{\sqrt{-\mu/a}} = \frac{a}{\sqrt{-\mu/a}}(F - e\sinh F) \tag{33}$$

de donde recordando que a es negativo

$$\sqrt{-\mu/a^3}(t-T) = e\sinh F - F \tag{34}$$

que es la analoga hiperbolica de la ecuacion de Kepler (recordar que $a < 0$). Dado un instante $t \longrightarrow F \longrightarrow r \longrightarrow \theta$ y la posicion (r,θ) en la hiperbola queda definida.