DINAMICA ORBITAL - PRACTICO VII

Problema de N Cuerpos

1. Sean 3 masas m_1, m_2, m_3 iguales a 1, 2 y 3 $M_\odot$ respectivamente encontrándose en determinado instante en una configuración de triángulo equilátero de 30 ua de lado y orbitando respecto al baricentro con órbitas elípticas de período de 100 años. Calcular la velocidad orbital de m_1.

   Piques: como es la ley de Kepler?

2. Tres planetas de masas m_0, m_1, m_2 orbitan una estrella de masa M. Los 3 planetas se encuentran capturados en una resonancia de tres cuerpos en la que se verifica

$$k_0 n_0 + k_1 n_1 + k_2 n_2 \simeq 0$$

   siendo n_i los movimientos medios. Probar que dados a_1, a_2 el semieje del tercer planeta será:

$$a_0^{-3/2} \simeq -\frac{k_1\sqrt{(M+m_1)}}{k_0\sqrt{(M+m_0)}}a_1^{-3/2} - \frac{k_2\sqrt{(M+m_2)}}{k_0\sqrt{(M+m_0)}}a_2^{-3/2}$$

   Piques: simplemente despejar.

3. • Utilizando ORBE integre los planetas gigantes junto a 20 partículas sin masa con idénticos elementos orbitales iniciales pero con semiejes distribuidos entre $2.4 < a < 2.6$ ua y con $e = 0.1$ e integrar por 1 millón de años con salida de datos cada mil años. Hacer un gráfico superponiendo todos los estados orbitales de los asteroides ficticios en el espacio (a, e) y otro con (a, i). Explique estos resultados.

   Piques: se obtiene una figura con la distribucion de los estados orbitales a lo largo de toda la evolucion.

4. • Probar que

$$\frac{1}{M}\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{i\leq j}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i m_j r_{ij}^2\right) = 4C + 2U$$

   . donde $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

   Piques: poner $r_{ij}^2 = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2$ y operar.

5. • Sea un sistema de n cuerpos donde la fuerza resultante en cada masa m_i es $\vec{F}_i$. Probar que

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$$

   .

   Piques: partir de la definicion de I.

6. Escribir las ecuaciones del movimiento para un sistema de N cuerpos en donde la ley de fuerza varía inversamente con la potencia k de la distancia.

   a) Hallar la función fuerza y las 10 integrales del movimiento.

   b) Hallar el valor de k para el cual las ecuaciones de movimiento son independientes.

   Piques: la funcion fuerza es aquella cuyo gradiente nos da la ley de fuerza. Ecuaciones independientes significa que la ecuacion para m_i solo depende de r_i.

7. Probar explícitamente que en un sistema de N masas puntuales sometidas a atracción newtoniana se cumple:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \nabla_i U = -U$$

Calcular la sumatoria anterior para el caso en que la fuerza sea dada por

$$\mid \vec{F}_{ij} \mid = \frac{k^2 m_i m_j}{r_{ij}^K}$$

con $K > 2$.

Piques: comenzar probando que $\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \nabla_i U = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \nabla_i U$.

8. Calcular el radio de la esfera de influencia (o esfera de actividad) para la Tierra. Estime la aceleración que produce la Tierra en la Luna y la aceleración que produce el Sol en la Luna. Explique el resultado.

Piques: algo que ver con mareas.

9. • Estime el máximo valor de la perturbación de Júpiter en la órbita heliocéntrica de un objeto transneptuniano y en la órbita heliocéntrica de un asteroide con afelio en 4.5 ua.

Piques: se pide evaluar el maximo valor de la funcion perturbadora.

10. Considere un cometa de órbita baricéntrica circular y de semieje a. Si en vez del baricentro tomamos el Sol como origen probar que el semieje heliocéntrico a_H experimentará variaciones $\Delta a_H \simeq 2V_\odot a^{3/2}/k$ siendo $V_\odot$ la velocidad orbital del Sol respecto al baricentro del Sistema Solar. Estimar Δa_H para el caso de un TNO con $a = 100$ ua y para el caso de un cometa en la nube de Oort con $a = 10.000$ ua.

Piques: podemos asumir que la distancia es la misma pero no asi la velocidad.

11. • Un cometa de elementos orbitales $a = 3$ ua, $e = 0.5$ e $i = 15°$ sufre continuamente una perturbación del tipo $R = T = C/r^2$ y $N = 0$ según las direcciones radial, transversa y normal respectivamente, siendo C una constante. a) Probar que $< da/dt >= 2C/(k\sqrt{a}(1-e^2))$ siendo k la constante de Gauss. b) Hallar C sabiendo que en 100 años el cometa aumentó su semieje en 0.1 ua.

Piques: ecuaciones de Gauss, instantaneas y medias.

12. Considere un asteroide experimentando una perturbación continua del tipo $R = cte$ y $T = N = 0$ según las direcciones radial, transversa y normal respectivamente. Probar que $< da/dt >=< de/dt >=< di/dt >= 0$.

Piques: ecuaciones de Gauss, instantaneas y medias.