DINAMICA ORBITAL - PRACTICO IV

Problema de Dos Cuerpos (b)

1. *Resolución de la ecuación de Kepler.* Una ecuación de la forma $x = Y(x)$ puede resolverse por un algoritmo de iteración del tipo $x_{i+1} = Y(x_i)$ sólo si se cumple la condición $|Y'(X)| < 1$ siendo $x = X$ la solución. Si la condición no se cumple la iteración no convergerá.

   a) Idear un algoritmo de iteración para resolver la ecuación de Kepler para el caso elíptico: $E - e\sin E - M = 0$. Aplicación: hallar E siendo $e = 0.5$ y $M = 2$ rads. Solucion: $E = 2.354$ rads.

   b) Idem para el caso hiperbólico: $e\sinh F - F - M = 0$. Aplicación: hallar F siendo $e = 3$ y $M = 1$ rad. Solucion: $F = 0.473$.

   Piques: el caso eliptico es inmediato y en el hiperbolico hay que masticar un poco la ecuacion que relaciona F y M.

2. Un cometa tiene una distancia perihélica $q = 1$ ua. Hallar la distancia heliocéntrica y la anomalía verdadera que tendría 10 dias después del pasaje por el perihelio para tres diferentes modelos de órbitas con excentricidades $e = 0.9$, $e = 1$ y $e = 1.1$.

   Piques: hay que resolver iterativamente ecuacion de Kepler eliptica e hiperbolica. En el caso parabolico hay solucion explicita.

3. • Parcial 2012. *Satélite Molniya.* Un satélite artificial geocéntrico tiene un período orbital de 12 horas y un perigeo $q = 1.1R_\oplus$. Calcule durante cuanto tiempo permanece con anomalía verdadera entre 120° y 240°.

   Piques: hay que obtener las anomalias medias correspondientes.

4. • Dos estrellas de masas m y M se encuentran separadas a gran distancia (esto significa distancia infinita). La estrella m tiene una velocidad $\vec{V}$ relativa a M en una dirección que pasa a una distancia mínima σ (*parámetro de impacto*) de M. Probar que después del encuentro, cuando se han vuelto a separar a gran distancia, M ha cambiado su velocidad en

$$\frac{2mVG}{\sqrt{G^2(M+m)^2 + \sigma^2 V^4}}$$

   respecto a un sistema inercial.

   Piques: don ' t panic! pararse en el baricentro, conservacion de momento, obtener la variacion de la velocidad de M en funcion de la variacion de la velocidad mutua. Y la vel mutua antes y despues del encuentro sale de resolver la hiperbola.

5. • Dos estrellas de masas M y m están a gran distancia y se mueven una respecto a la otra con velocidad relativa $\vec{V}$. Sea σ la distancia mínima a la que pasarían si no hubiera atracción gravitacional.

   a) Mostrar que debido a dicha atracción la distancia mínima d entre ambas verifica

$$1/d = G(M+m)\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2 V^4}{G^2(M+m)^2}}}{\sigma^2 V^2}$$

   b) Mostrar que el ángulo ϕ que gira la velocidad relativa luego del encuentro cumple:

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{G(M+m)}{\sigma V^2}$$

   Piques: resolver la hiperbola del movimiento relativo. El angulo esta definido por las asintotas.

6. • Una partícula es lanzada desde gran distancia hacia una estrella de masa M y radio R con velocidad V tal que despreciando la atracción de la estrella se aproximaría hasta una distancia mínima σ de la misma.

   a) Escribir las ecuaciones de la energía y momento angular.

   b) Encontrar σ tal que la partícula pase rasante a la estrella.

   Piques: en la parte b hay que imponer que la distancia de periastro sea igual al radio de la estrella.

7. *Velocidad de acreción de Eddington.* Una estrella de radio R se mueve a través de una nube de partículas de densidad ρ (partîculas por unidad de volumen) con una velocidad relativa a la nube igual a V. Suponiendo que las partículas no tienen velocidad relativa a la nube, algunas de ellas, las que están dentro de un túnel de radio σ, serán acretadas por la estrella. Mostrar que la velocidad de acreción es:

$$A = \pi R^2 \rho (V + \frac{2MG}{RV})$$

   expresada en partículas por unidad de tiempo.

   Piques: tiene que ver con el ejercicio anterior.