DINAMICA ORBITAL
Soluciones homograficas de Lagrange

Caso particular de triangulo equilatero. En el caso de tres cuerpos diferentes masivos ubicados formando triangulo equilatero la aceleracion de cada uno resulta ser newtoniana apuntando al baricentro. Sin embargo en principio los periodos orbitales de cada uno serian diferentes por lo cual nada asegura que la configuracion se mantiene un instante despues del inicial. Tendriamos que asegurarnos que los movimientos medios son todos iguales y si imponemos esta condicion quedan definidas las $\vec{v_i}$ iniciales que deben ademas formar el mismo angulo con los $\vec{r_i}$ para que la figura no se distorsione. Tambien vemos que en este caso la relacion entre las aceleraciones es igual a la relacion entre las distancias al baricentro.

Caso general. Veremos en el caso general como deberia ser la acelaracion de cada masa de forma que se mantenga la configuracion inicial cualquiera sea esta. Esto implica que todas las distancias mutuas y al baricentro deben variar con la misma escala $\lambda(t)$. Tambien la velocidad angular $\theta(t)$ debe ser igual para los 3 cuerpos. Al imponer que el momento angular total sea constante obtenemos que esto implica que el momento angular de cada cuerpo sera constante.

En consecuencia la aceleracion de cada masa es solo radial y de esto podemos deducir que $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = r_1 : r_2 : r_3$. Esta es una condicion necesaria que deben cumplir las aceleraciones para que la solucion sea homografica. Y para garantizar la configuracion homografica en el futuro basta con que las condiciones iniciales sean adecuadas, esto es velocidades iniciales todas formando el mismo angulo con los vectores $\vec{r_i}$ para asegurar que $\dot{\theta}$ es igual para las 3 masas.

Cada masa describira una conica (pues la aceleracion al baricentro es newtoniana) de semieje diferente pero igual excentricidad e igual periodo en torno al baricentro. En todo instante la anomalia verdadera es la misma para los 3 cuerpos. Lagrange tambien probo que las 3 masas deben tener orbitas coplanares.

Sabemos que la configuracion de triangulo equilatero satisface la condicion $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = r_1 : r_2 : r_3$ pues teniamos que $\alpha_i = M_{tot} r_i / r^3$ por lo tanto seria una solucion homografica posible. ¿Sera la unica?

¿Bajo que configuraciones puedo tener siempre fuerzas colineales con los radios vectores?

Operando encontramos que una solucion es efectivamente la de triangulo equilatero pero existe otra posibilidad: las tres masas alineadas. Pero deberan estar a ciertas distancias unas de otras pues la acelarcion resultante debe ser proporcional a los r_i.

Entonces fijemos las posiciones de m_1, m_2 en un eje x con origen en el baricentro y $x_1 > x_2$, tomamos como unidad de distancia $x_1 - x_2$ y llamamos $X = x_2 - x_3 > 0$ asumiendo que la tercera masa estara a la izquierda. Planteando la acelaracion para cada masa $\alpha_i = Rx_i$ y operando llegamos a un polinomio de 5to orden en X. Se puede probar que tiene una sola raiz positiva por lo tanto existe una unica posicion para m_3 a la izquierda de ambas.

Si buscamos una solucion para m_3 a la derecha de m_1 tambien llegaremos a un polinomio de 5to orden con una unica solucion. Y tambien podemos probar que existe una solucion entre las masas 1 y 2.

En resumen dadas 2 masas m_1, m_2 es posible colocar una tercera masa en 5 lugares diferentes para lograr soluciones homograficas. Esas 5 posiciones tienden a ser las del problema restricto cuando la tercera masa es despreciable.