

La ceguera de MacCullagh

Tabaré Gallardo

El potencial simplificado de la fórmula de MacCullagh es

$$V(\vec{r}) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{(A + B + C - 3I)}{2Mr^2} \right] \quad (1)$$

con

$$I = \hat{r}\Pi\hat{r} = (Ax^2 + By^2 + Cz^2)/r^2 \quad (2)$$

En el caso de una esfera tenemos $A = B = C = I$ y resulta igual al potencial de una masa puntual. Pero en el caso de un cubo también tenemos $A = B = C$, y además siempre que se cumple que los 3 momentos principales de inercia son iguales tendremos:

$$I = \hat{r}\Pi\hat{r} = (Ax^2 + Ay^2 + Az^2)/r^2 = A \quad (3)$$

Por lo tanto el potencial de MacCullagh para un cubo también es igual que para una masa puntual. ¿Será que el potencial de un cubo es igual al de un punto o será que la fórmula es demasiado aproximada por haber despreciado términos de orden 3? Para salir de la duda calcularemos numéricamente el potencial de un cubo usando un código en FORTRAN dividiendo el cubo original en 1000 cubitos. El resultado se muestra en la figura. El potencial es bastante parecido al de una esfera homogénea o masa puntual excepto en las proximidades del cubo. En particular ver que si agregamos un océano en ese planeta se acumulará al centro de cada lado creando elevaciones de agua mientras las aristas emergen como montañas. Claro que eso despreciando el potencial generado por el propio océano. Para obtener una expresión mas precisa del potencial es necesario considerar términos de mayor orden en la expresión de MacCullagh (ver *Methods of Celestial Mechanics*, Brouwer y Clemence 1961, pag 126). El interés por el cálculo del potencial de un cubo continúa hasta el presente, ver por ejemplo <https://arxiv.org/abs/1206.3857>.

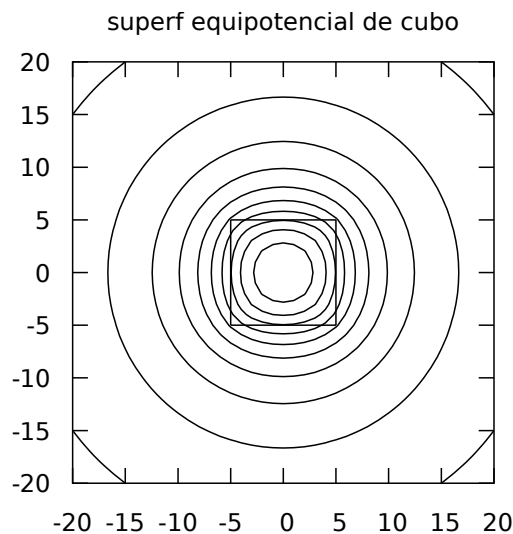


Figure 1: Superficies de equipotencial en el plano xy. Curvas de nivel calculadas con gnuplot.

```

C CODIGO FORTRAN PARA CALCULO NUMERICO DE POTENCIAL DE UN CUBO
  IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
  DIMENSION X(3)
  OPEN(1,FILE="potencial.dat",STATUS="UNKNOWN", ACCESS="APPEND")
C DEFINICION DE GRILLA ESPACIAL PARA CALCULO DE POTENCIAL
  DO 20 I=1,100
    DO 21 J=1,100
      X(1)=-50.DO + DFLOAT(I)*1.DO
      X(2)=-50.DO + DFLOAT(J)*1.DO
C CALCULO POTENCIAL EN PLANO (X,Y) CON Z=0
      X(3)=0.DO
      CALL POTENCIAL(X,F)
      WRITE(1,100) X(1),X(2),X(3),F
21    CONTINUE
      WRITE(1,*)'          '
20    CONTINUE
100  FORMAT(4F20.9)
      CLOSE(1)
      STOP
      END

C
C POTENCIAL DE CUBO  HOMOGENEO
C
  SUBROUTINE POTENCIAL(X,F)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DIMENSION X(3)
C G*M ES ARBITRARIO
  GM=1.D-3
  F=0.DO
C EL CUBO VA DE -5 A 5 UNIDADES EN X,Y,Z
C DIVIDO EL CUBO EN 10X10X10 CUBITOS
  DO I=1,10
    DO J=1,10
      DO K=1,10
C COORDENADAS DEL CENTRO DE CADA CUBITO
        XC=DFLOAT(I)-5.DO - 0.5DO
        YC=DFLOAT(J)-5.DO - 0.5DO
        ZC=DFLOAT(K)-5.DO - 0.5DO
C DISTANCIA DEL CUBITO AL PUNTO X
        DIS=DSQRT((X(1)-XC)**2+ (X(2)-YC)**2+(X(3)-ZC)**2)
C POTENCIAL EN EL PUNTO
        DF=GM/DIS
        F=F+DF
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO
  RETURN
  END

```