

# Efectos dinámicos de las resonancias orbitales en el Sistema Solar

T. Gallardo<sup>1</sup>

Facultad de Ciencias (UDELAR)

Contacto / gallardo@fisica.edu.uy

**Resumen** / Describimos las diferentes resonancias orbitales que en el Sistema Solar afectan fundamentalmente a los cuerpos menores y algunos satélites. Presentamos una idea de cómo se pueden estudiar las resonancias de movimientos medios de dos y tres cuerpos, las resonancias seculares y el mecanismo de Kozai-Lidov y las conclusiones que pueden extraerse de estos estudios. Las resonancias débiles generan sutiles variaciones orbitales periódicas y producen concentraciones temporarias de objetos mientras que las resonancias fuertes pueden generar grandes variaciones en excentricidad e inclinación poniendo en riesgo la estabilidad orbital.

**Abstract** / We describe the different orbital resonances in the Solar System that primarily affect minor bodies and some satellites. We present an idea of how to study the two body and three body mean motion resonances, secular resonances and Kozai-Lidov mechanism and the conclusions that can be drawn from these studies. Weak resonances generate subtle periodic orbital variations and produce temporary concentrations of objects while strong resonances can generate large variations in eccentricity and inclination risking the orbital stability.

**Keywords** / Celestial mechanics – minor planets – comets

## 1. Introducción

Técnicamente las resonancias orbitales ocurren cuando existe una conmensurabilidad entre las frecuencias asociadas con el movimiento o la evolución orbital de los cuerpos. Estas frecuencias están asociadas al movimiento medio,  $n$ , en torno al cuerpo central, al movimiento de la línea de los nodos,  $\Omega$ , y al de la dirección del pericentro  $\varpi$ . Dentro de estas resonancias se suelen incluir las resonancias de dos y tres cuerpos, las resonancias seculares y el mecanismo de Kozai-Lidov (KL) al que nos referiremos en la Sección 3.2.. En el Sistema Solar existe una gran variedad de ejemplos de resonancias orbitales que involucran a planetas, satélites, anillos, asteroides, cometas, transneptunianos y corrientes meteóricas. El objeto resonante puede ser tanto interior a la órbita del planeta perturbador como exterior. El efecto dinámico puede ser notable como lo podemos comprobar en el ejercicio de integración numérica de órbitas que mostramos en la Figura 1. Allí vemos la superposición de estados orbitales de un conjunto de partículas ficticias que inicialmente tenían las mismas condiciones iniciales, excepto sus semiejes que fueron tomados a intervalos regulares entre 2.3 y 2.6 ua. Aquellas con semieje inicial próximo a 2.5 ua experimentaron variaciones drásticas en la excentricidad generadas por la resonancia 3:1 con Júpiter. Es lógico pensar que no puedan existir muchos asteroides en esa región.

Para entender las resonancias debemos tener presente que no se trata de un efecto instantáneo sobre la órbita del asteroide como lo sería el encuentro próximo con un planeta que le generaría cambios orbitales de forma impulsiva. El movimiento resonante surge luego

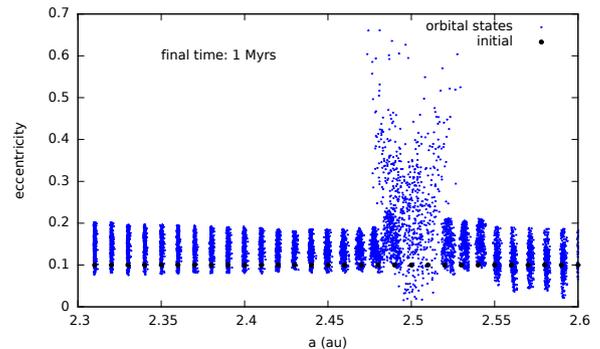


Fig. 1: Evolución de 30 partículas ficticias a lo largo de 1 millón de años.

de promediar el efecto acumulativo de las pequeñas perturbaciones del planeta sobre el asteroide luego de muchas revoluciones heliocéntricas. Pensemos en el caso de un asteroide que no está en resonancia con Júpiter, es decir que su movimiento medio no guarda una relación sencilla con el de Júpiter. Si graficamos las posiciones relativas del asteroide en el sistema rotante Sol-Júpiter comprobaremos que al cabo de algunos centenares de revoluciones la trayectoria del asteroide define una especie de toro (Fig. 2). En promedio la perturbación de Júpiter será únicamente en la dirección Sol-Júpiter pues en la dirección transversa o perpendicular los efectos se compensan. Gauss, y nosotros en los cursos de mecánica celeste, probamos que sólo la componente transversa de una perturbación acaba afectando a la evolución del semieje orbital de un objeto. Como aquí no hay com-

ponente transversa neta, entonces el semieje orbital del asteroide se mantendrá constante, típico de lo que llamamos evolución secular. En el caso de un asteroide en resonancia con Júpiter, la trayectoria ya no es un toro sino una especie de banda que suele ser una figura muy bonita y que en gral no es simétrica respecto a la dirección Sol-Júpiter y en consecuencia aparece una componente transversa que generará un cambio en el semieje del asteroide. Esta variación en  $a$ , una oscilación de período de algunos cientos de años para el caso de los asteroides, es lo que caracteriza al movimiento resonante y se denomina “libración”.

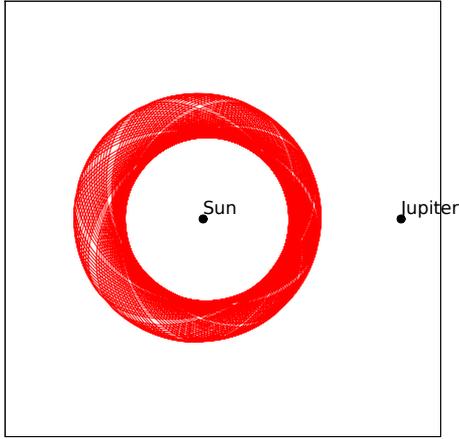


Fig. 2: Posiciones relativas de un asteroide no resonante (en rojo) en el sistema rotante Sol-Júpiter.

Un asteroide dominado por una resonancia tenderá a permanecer en ella frente a otras perturbaciones. En cambio un asteroide no resonante no cuenta con esta protección por lo que frente a otras perturbaciones puede acabar variando su semieje en forma errática. De ahí que en las resonancias se producen concentraciones de objetos que son capturados al menos temporariamente.

## 2. Resonancias de dos cuerpos

### 2.1. Descubrimiento

El primer hallazgo relacionado con el movimiento resonante fue debido a Lagrange en 1772 cuando encuentra sus famosos puntos de equilibrio en el problema de tres cuerpos. En este caso se trata de la resonancia 1:1, es decir, objetos en movimiento coorbital con el planeta perturbador. La estabilidad fue confirmada con el descubrimiento 134 años después del troyano (588) Aquiles. Algunos de los troyanos que hoy conocemos no describen oscilaciones en torno de los puntos de equilibrio  $L_4$  o  $L_5$  sino que describen una especie de herradura abarcando a ambos puntos. Incluso tenemos el ejemplo de los satélites de Saturno, Jano y Epimeteo, que son troyanos mutuos pues ambos se perturban conservando la resonancia 1:1. Hoy además de conocer más de seis mil troyanos, algunos de ellos coorbitando un planeta diferente de Júpiter, sabemos que existen otros movimientos

producto de la resonancia 1:1, por ejemplo los cuasi-satélites. No son satélites planetarios pues están bien más allá de la esfera de Hill del planeta pero como son coorbitales el movimiento relativo resultante es una especie de elipse muy amplia alrededor del planeta, que es recorrida en sentido retrógrado. Varios planetas, incluyendo los terrestres, poseen cuasi-satélites. Más adelante, en 1784, Laplace explica la curiosa relación entre los períodos orbitales de los tres satélites Galileanos más internos como una superposición de resonancias que da lugar a una resonancia de tres cuerpos, una de las situaciones orbitales más complejas que conocemos. En 1846 con el descubrimiento de Neptuno queda claro también que los planetas gigantes se encuentran muy próximos de resonancias mutuas, situación que recién en las últimas décadas comenzamos a entender como un resultado de un proceso de migración orbital en las primeras etapas evolutivas de los sistemas planetarios (Batygin, 2015).

El más conocido efecto de las resonancias son las fallas o *gaps* de Kirkwood. En un histograma de semiejes orbitales de los asteroides estas fallas aparecen como regiones en donde hay una falta notoria de objetos. Kirkwood en 1866 asoció estas fallas a evoluciones inestables generadas por resonancias con Júpiter. Finalmente el primer asteroide resonante, (153) Hilda, se descubre en 1875. Este asteroide da nombre al grupo de más de mil asteroides que se encuentran en la resonancia 3:2 con Júpiter, es decir que sus movimientos medios verifican  $2n = 3n_J$ . La dinámica resonante no es tan simple como para asumir que todas generan fallas o todas concentraciones de asteroides. En general las resonancias generan un crecimiento en la excentricidad orbital de los asteroides pero esto no llega a terminar en una colisión con el planeta perturbador pues justamente sus movimientos están sincronizados de forma que se evitan mutuamente. Sin embargo, puede ocurrir un encuentro con otro planeta ajeno a la resonancia como Marte o la Tierra, generándose una perturbación excesivamente alta que quita al asteroide de la resonancia produciéndose una falla. Los Hildas se encuentran lejos de los planetas interiores y pueden existir como un grupo estable por miles de millones de años. En la Figura 3 mostramos cómo la distribución de asteroides está esculpida por las resonancias con Júpiter, con Marte y también por resonancias de tres cuerpos involucrando a Júpiter y Saturno simultáneamente y que explicaremos más adelante en la Sección 4.

### 2.2. Teoría

Sean  $p, q$  dos números enteros llamados grado y orden de la resonancia respectivamente, la localización aproximada de la resonancia  $|p + q| : |p|$  con Júpiter es trivial aplicando la tercera ley de Kepler

$$pn = (p + q)n_J$$

$$a \simeq \left(\frac{p}{p + q}\right)^{2/3} a_J$$

donde el orden es siempre  $q \geq 0$  mientras que  $p > 0$  para resonancias interiores al planeta y  $p < 0$  para las exteriores. Dado que existen infinitas resonancias el problema es encontrar aquellas con cierta fuerza o relevancia

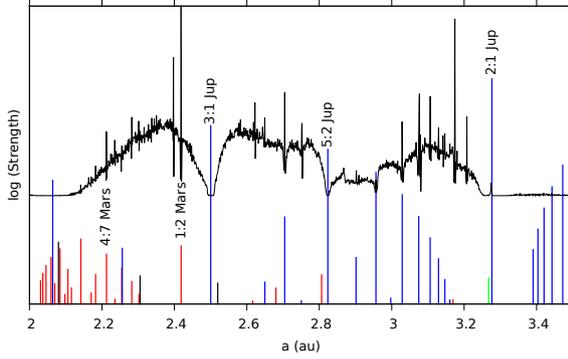


Fig. 3: Histograma de semiejes propios o medios de los asteroides (en negro) superpuesto a algunas resonancias de dos cuerpos con Marte (rojo) y con Júpiter (azul). Las fuerzas de las resonancias están en escala logarítmica. Los picos y las fallas en el histograma son generados por resonancias.

dinámica. Las teorías se elaboran a partir de diferentes versiones del método de variación de parámetros utilizando o no variables canónicas (Murray & Dermott, 1999; Morbidelli, 2002; Nesvorný et al., 2002; Ferraz-Mello, 2007). En todo caso se debe conocer la función perturbadora resonante  $R$  en función de las variables utilizadas y se puede probar que la variación temporal en el semieje de un asteroide está dada por

$$\frac{da}{dt} \propto \frac{\partial R}{\partial \sigma}$$

En el caso más simple de movimientos coplares y despreciando la excentricidad de Júpiter se puede probar que la parte relevante de  $R$  es

$$R \sim m_J e^q \cos \sigma$$

siendo  $m_J$  la masa de Júpiter,  $e$  la excentricidad del asteroide y  $\sigma$  el ángulo crítico

$$\sigma = (p + q)\lambda_J - p\lambda - q\varpi$$

donde  $\lambda$  refiere a las longitudes medias. El ángulo crítico es quien define cuán profundo se encuentra el asteroide en la resonancia. Si presenta pequeñas libraciones nos indica que el asteroide está capturado en una región profunda mientras que si la amplitud es grande se encuentra en un borde y fácilmente podría escapar. Tenemos entonces que

$$\frac{da}{dt} \propto m_J e^q \sin \sigma$$

de donde deducimos que la amplitud máxima de la libración es  $\propto m_J e^q$ . Puede verse que en este modelo los puntos de equilibrio están en  $\sigma = 0^\circ$  o  $\sigma = 180^\circ$ . Sin embargo, en el caso de resonancias externas de tipo 1:x,  $R$  es más compleja y los puntos de equilibrio están en posiciones que dependen de la excentricidad orbital, razón por la cual estas resonancias se llaman “asimétricas” (Beauge, 1994).

Podemos entonces definir un ancho de la resonancia en  $a$  expresado en ua que depende de la excentricidad, del orden de la resonancia y de la masa del perturbador

y que tiene forma de V en el plano  $(a, e)$ . Cuando  $e$  es muy pequeña o el orden  $q$  es grande las resonancias son muy débiles y angostas pero a medida que consideramos excentricidades mayores las resonancias se vuelven más anchas y pueden llegar a superponerse generando una dinámica caótica. Los objetos muy excéntricos como los cometas suelen evolucionar saltando de una resonancia a otra hasta su destrucción física por efecto de la radiación solar. Las libraciones en  $a$  están correlacionadas con libraciones en  $e$  y esto da lugar a las famosas trayectorias tipo bananas como se muestra en la Figura 4. Como se puede ver en la figura, en este caso el ángulo crítico libra en torno de un punto de equilibrio estable ubicado en  $\sigma = 180^\circ$ . Si el asteroide no estuviera en resonancia el ángulo crítico circularía de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  en un sentido o en otro dependiendo del valor de su semieje y la figura sería aproximadamente un círculo con centro próximo al origen, es decir que mientras circula el ángulo crítico la excentricidad prácticamente no varía. En un movimiento resonante siempre se verifica que las oscilaciones en  $\sigma$  están correlacionadas con las de  $a$  y  $e$ . Se puede probar que cuanto más fuerte es la resonancia más alta es la frecuencia de libración.

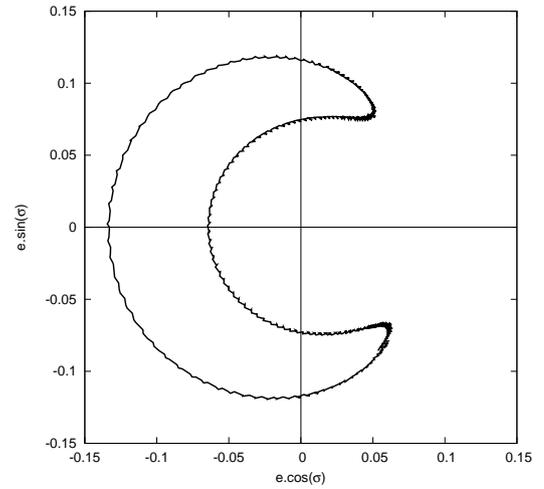


Fig. 4: Típica trayectoria de libración de un asteroide resonante.

La teoría para órbitas inclinadas respecto al planeta perturbador es considerablemente más complicada pues la función  $R$  también lo es. Ésta es una sumatoria de varios términos resonantes y la dinámica final es el resultado de la suma de todos estos efectos generándose lo que se conoce como multiplete (Murray & Dermott, 1999). Ignorando la excentricidad e inclinación de Júpiter se puede probar que los términos más importantes de  $R$  en la resonancia genérica  $k_2 : k_1$  son del tipo

$$R = m_J \sum_j C_j(a, e, i) \cos(\sigma_j)$$

con

$$\sigma_j = k_1 \lambda + k_2 \lambda_J + k_3 \varpi + k_4 \Omega$$

siendo que  $k_3$  y  $k_4$  pueden ser arbitrarios pero deben

verificar:

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$$

y donde el término principal verifica

$$C_0(a, e, i) \propto e^{k_3} (\sin i)^{k_4}$$

lo que da lugar a resonancias tipo excentricidad cuando  $k_4 = 0$ , tipo inclinación cuando  $k_3 = 0$  o mixtas cuando ambos  $k$  son no nulos. En el caso general con órbitas excéntricas e inclinadas existirán varios ángulos críticos para una misma resonancia  $k_2 : k_1$

$$\sigma_j = k_1 \lambda + k_2 \lambda_J + k_3 \varpi + k_4 \varpi_J + k_5 \Omega + k_6 \Omega_J$$

donde  $k_3, k_4, k_5, k_6$  pueden ser arbitrarios siempre que verifiquen que la suma de todos los  $k_i$  sea 0. Si bien los  $\sigma_j$  pueden ser un conjunto infinito sólo son relevantes dinámicamente algunos de ellos. Finalmente digamos que si alguno de los  $\sigma_j$  relevantes dinámicamente tiene una frecuencia de oscilación conmensurable con la frecuencia de circulación del nodo o perihelio se produce una “resonancia secundaria”. Éstas existen en determinadas regiones del espacio  $(a, e, i)$  y generan una difusión caótica a lo largo de estas regiones.

### 2.3. Métodos numéricos

Los métodos analíticos nos permiten identificar los efectos dinámicos de cada uno de los términos de  $R$  por separado, es decir nos permiten encontrar las causas de las dinámicas observadas, pero la complejidad de la manipulación algebraica involucrada en la resolución puede ser tan grande que a veces es preferible calcular  $R(\sigma)$  numéricamente y a partir de esto deducir el movimiento. Si queremos tener un panorama global de la localización y fuerza de todas las resonancias en un sistema planetario es necesario apelar a un método numérico como el que presentamos en Gallardo (2006). La idea es calcular la perturbación promedio que sufre un asteroide en resonancia con elementos orbitales que se asumen fijos. La construcción numérica de  $R(\sigma)$  nos permite hallar los puntos de equilibrio para órbitas resonantes con elementos orbitales arbitrarios lo cual sería muy difícil de obtener por métodos puramente analíticos. La Figura 5 nos muestra un ejemplo en donde podemos apreciar cómo cambia la forma de  $R(\sigma)$  y sus puntos de equilibrio según cual sea la excentricidad e inclinación del asteroide.

A partir de  $R(\sigma)$  definimos  $SR$  como “fuerza” de la resonancia a la semiamplitud de la variación de  $R$ . De esta manera podemos obtener un atlas de posiciones y fuerzas de todas las resonancias con todos los planetas en un cierto rango de semiejes orbitales. En la Figura 6 podemos ver este atlas para la región transneptuniana donde queda en evidencia lo relevante que son las resonancias asimétricas tipo 1:x con Neptuno, pues son las más fuertes y además están desprovistas de resonancias próximas que las perturben. La fuerza así definida puede ser relacionada con el ancho en ua de la resonancia (Soja et al., 2011).

Otra característica importante de las resonancias es el *stickiness* o pegajosidad, que es la capacidad para

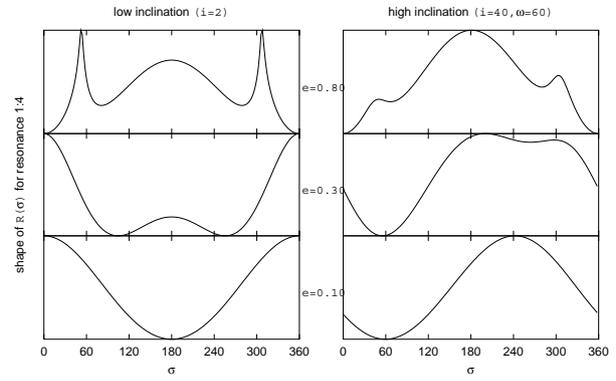


Fig. 5:  $R(\sigma)$  para diferentes excentricidades e inclinaciones para la resonancia externa 1:4. Los puntos de equilibrio estable se encuentran en los mínimos. Adaptado de Gallardo (2006).

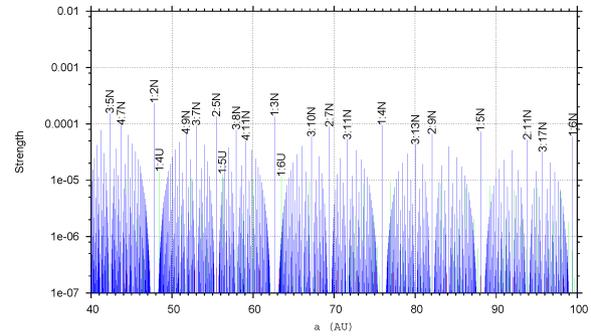


Fig. 6: Atlas de resonancias entre 40 ua y 100 ua. Adaptado de Gallardo (2006).

retener órbitas pegadas a la resonancia pero por fuera de la misma, es decir órbitas que evolucionan en la región del borde. Esto ocurre frecuentemente con los asteroides que migran por efecto Yarkovsky (Bottke et al., 2006) y son capturados temporalmente por este mecanismo como se muestra en la Figura 7. La fuerza y el *stickiness* también están correlacionados como lo probaron Lykawka & Mukai (2007) en la región transneptuniana. Recientemente Milić Žitnik & Novaković (2016) probaron que la fuerza también está relacionada con el tiempo durante el cual es retenido un asteroide en la resonancia.

Morais & Namouni (2013b,a) estudiaron la estabilidad de resonantes en órbitas de alta inclinación y retrógradas y encontraron resultados en extremo curiosos como por ejemplo que un objeto coplanar coorbital con Júpiter pero retrógrado es estable para ciertas condiciones iniciales. Lo notable es que esta predicción teórica, que parece absurdo pensar en aplicarla a la naturaleza, ya se confirmó con la existencia del objeto 2015 BZ509, coorbital con Júpiter y con inclinación de  $163^\circ$ . En los cometas retrógrados son muy frecuentes las resonancias como lo acabamos de estudiar en un trabajo a publicar con colegas de nuestro grupo.

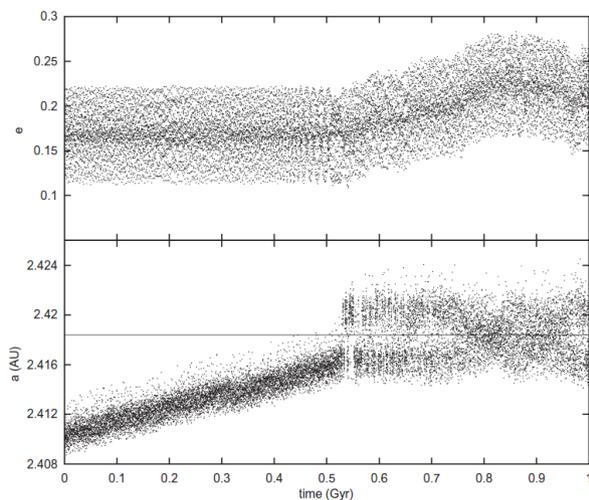


Fig. 7: Simulación de asteroide ficticio migrando por efecto Yarkovsky que queda atrapado por stickiness a la resonancia 1:2 con Marte, cuya localización en  $a$  se indica con la línea horizontal. Obsérvese el cambio en el comportamiento de la excentricidad al entrar en régimen de stickiness. Adaptado de Gallardo et al. (2011).

### 3. Resonancias seculares y mecanismo de Kozai-Lidov

#### 3.1. Resonancias seculares

Olvidémonos del movimiento orbital y pensemos en las órbitas como figuras geométricas. Las órbitas de los planetas oscilan así como las de los cuerpos menores. Cuando estas oscilaciones resultan conmensurables tenemos las llamadas resonancias seculares. Por ejemplo, si la frecuencia de circulación de la dirección del perihelio de un asteroide es igual a la del perihelio de Saturno (planeta 6) entonces el asteroide experimentará la resonancia secular  $\nu_6$ . Estas resonancias no ocurren en valores fijos de  $a$  como con las de movimientos medios sino que tenemos un vínculo funcional  $a(e, i)$  (Knezevic et al., 1991). Algunas son muy fuertes y pueden generar notables cambios en las órbitas de los cuerpos menores, como en el ejemplo de la Figura 8. En escalas del orden de  $10^5 - 10^6$  años la excentricidad puede aumentar tanto que su distancia perihélica  $q$  puede llegar a ser inferior a 1 ua pudiendo ocurrir colisión con la Tierra. De hecho las resonancias seculares son una de las principales fuentes de meteoritos. Si no hay impacto con los planetas interiores ni ningún encuentro suficientemente próximo como para ser expulsado de la resonancia secular, la distancia perihélica puede tender a cero generándose una colisión con el Sol, es decir un *sun-grazer*. En un modo general las resonancias seculares ocurren cuando una de las frecuencias propias de la órbita del objeto puede escribirse como una combinación sencilla entre una o más frecuencias fundamentales del sistema planetario (Carruba & Michtchenko, 2007).

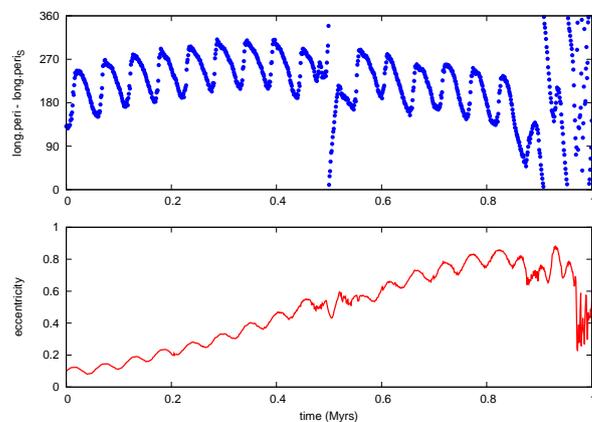


Fig. 8: Asteroide ficticio evolucionando en la resonancia secular  $\nu_6$ . La dirección de su perihelio varía con la misma frecuencia que la dirección del perihelio de Saturno,  $\varpi_S$ , lo que genera un incremento progresivo de la excentricidad acoplada con la evolución de  $\varpi - \varpi_S$ .

#### 3.2. Mecanismo de Kozai-Lidov (KL)

Es un efecto dinámico de largo plazo, es decir secular, que puede ser considerado como un tipo de resonancia secular pues ocurre cuando la frecuencia propia asociada a la longitud del perihelio es igual a la de la longitud del nodo, en consecuencia se observa que el argumento del perihelio  $\omega = \varpi - \Omega$  oscila. Este mecanismo está muy bien estudiado asumiendo que los planetas perturbadores tienen órbitas coplanares y circulares lo cual lleva a que la componente del momento angular perpendicular al plano del sistema,  $H$ , se conserve y en consecuencia la excentricidad y la inclinación tienen oscilaciones acopladas con la oscilación de  $\omega$ . Estas oscilaciones pueden ser muy grandes y llevar a cambios orbitales como vemos en la Figura 9. El método para estudiar estos efectos consiste en sustituir los planetas puntuales por anillos circulares de materia ya sea analíticamente o numéricamente lo que lleva a que el potencial gravitacional del sistema sea independiente del tiempo y como consecuencia la energía total de la partícula en estudio es constante lo que permite estudiar la dinámica mediante curvas de nivel de energía llamados mapas de Kozai. Este efecto es típico en objetos de alta inclinación y retrógrados como los cometas y los satélites irregulares.

Tanto las resonancias seculares como el mecanismo KL suelen aparecer también dentro de las resonancias de movimientos medios. En estos casos las variaciones orbitales pueden ser extremas como ocurre en la región transneptuniana en donde objetos con perihelio inicialmente próximos a la órbita de Neptuno por este mecanismo pueden crecer y llegar hasta  $q = 60$  ua o más (Fig. 10) convirtiéndose en un objeto desacoplado del disco, es decir, que no tiene un vínculo con las perturbaciones directas de Neptuno y por lo tanto resultaría difícil explicar su existencia a menos que se apele a un compañero solar desconocido (Gomes et al., 2005; Gallardo et al., 2012).

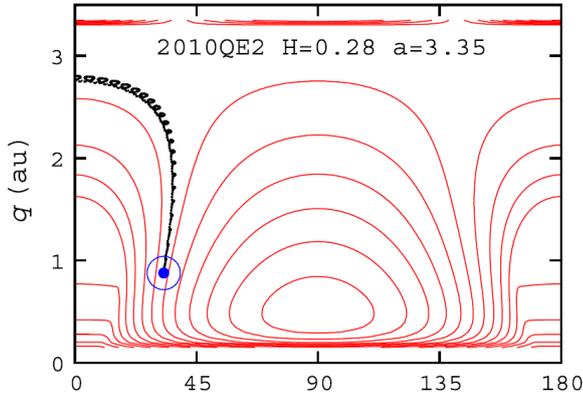


Fig. 9: Mapa de Kozai (curvas rojas) para un asteroide que se aproxima a la Tierra. En las abscisas se indica el argumento del perihelio,  $\omega$ , y en las ordenadas la distancia perihélica,  $q$ . La posición actual está marcada con un círculo azul y la línea en negra muestra el camino recorrido en los últimos  $10^4$  años. Véase el cambio de distancia perihélica que este mecanismo es capaz de generar. Adaptado de Fernández et al. (2014).

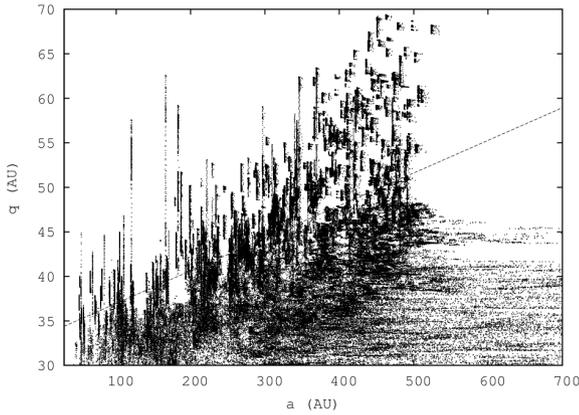


Fig. 10: Superposición de estados orbitales de 700 partículas evolucionando por 1000 millones de años en la región transneptuniana. Las líneas verticales ponen en evidencia el efecto KL (grandes cambios en  $q$ ) mientras permanecen capturadas en resonancias de movimientos medios con Neptuno ( $a$  constante). Adaptada de Gallardo et al. (2012).

#### 4. Resonancias de tres cuerpos

Consideremos dos planetas  $P_1$  y  $P_2$  que no están en resonancia mutua. Consideremos una partícula  $P_0$  que tampoco está en resonancia ni con  $P_1$  ni con  $P_2$  pero sin embargo su movimiento medio  $n_0$  verifica

$$k_0 n_0 + k_1 n_1 + k_2 n_2 = 0$$

En este caso decimos que el asteroide se encuentra en una resonancia de tres cuerpos con  $P_1$  y  $P_2$ . Su efecto dinámico aunque muy débil puede ser verificado numéricamente y de hecho existen miles de asteroides evolucionando en este tipo de resonancias (Smirnov & Shevchenko, 2013). Algunas de las concentraciones de asteroides que se aprecian en la Figura 3 son generadas por resonancias de tres cuerpos con Júpiter y Saturno.

Una de las primeras resonancias estudiadas en la historia de la mecánica celeste fue la resonancia Laplaciana que es la que verifican los satélites Galileanos. Si bien las duplas Io-Europa y Europa-Ganímedes están cada una en la resonancia 2:1, éstas son casi inexistentes dinámicamente pues las excentricidades de los satélites son muy pequeñas por lo cual el efecto dinámico más importante debería ser el de la resonancia de tres cuerpos  $n_I - 3n_E + 2n_G$  que resulta de la superposición de las dos resonancias de dos cuerpos (Ferraz-Mello, 1979). Un estudio analítico de estas resonancias es en extremo complejo debido a que la función perturbadora también lo es. En principio  $R$  tendría la forma

$$R = m_1 m_2 \sum_j C_j \cos(\sigma_j)$$

donde los  $C_j$  son funciones de los elementos ( $a, e, i$ ) de los tres cuerpos y los  $\sigma_j$  son funciones lineales de las variables ( $\lambda, \varpi, \Omega$ ) para los tres cuerpos, lo que significa que hay 18 parámetros involucrados. Hasta la fecha no existe ningún trabajo analítico que trate el caso general, en cambio existen algunos trabajos que desarrollan el caso plano, es decir las tres órbitas coplanares (Nesvorný & Morbidelli, 1999; Quillen, 2011). Los efectos dinámicos son similares a los de las resonancias de dos cuerpos pero de menor magnitud pues  $R$  está factorizada por el producto de las masas de los planetas expresadas en masas solares, que es un pequeño parámetro siempre.

En Gallardo (2014) desarrollamos un método numérico que permite estimar la amplitud de variación de  $R(\sigma)$  y con ello tener una idea de la fuerza de las resonancias de tres cuerpos. Aplicando este método encontramos que las libraciones asimétricas son más comunes que en el caso de resonancias de dos cuerpos y también pudimos estimar la fuerza de decenas de miles de resonancias de tres cuerpos involucrando todos los posibles pares de planetas en el Sistema Solar. De esta forma construimos un atlas global que presentamos en la Figura 11.

Tanto vía analítica como numérica se puede probar que las resonancias más fuertes son las de orden cero es decir las que cumplen  $k_0 + k_1 + k_2 = 0$ . En este caso la relación de resonancia puede escribirse como

$$k_1(n_1 - n_0) + k_2(n_2 - n_0) = 0$$

lo que significa que los cuerpos  $P_1$  y  $P_2$  están en resonancia mutua de dos cuerpos  $k_1 : k_2$  cuando se los observa desde el sistema rotante que gira según el movimiento medio del objeto  $P_0$ . Esto hace que las resonancias de orden cero sean las más fuertes y además se prueba que su fuerza es independiente de las excentricidades e inclinaciones. Lo cual implica que incluso órbitas de excentricidad cero sienten los efectos de las resonancias de tres cuerpos, que es una diferencia importante con las resonancias de dos cuerpos en donde es necesario que alguno de los objetos sea excéntrico de lo contrario la fuerza sería nula, con excepción de caso de los troyanos que es justamente una resonancia 1:1, o sea de orden cero.

Aunque más débiles, el número de resonancias de tres cuerpos en el Sistema Solar es muy superior al de

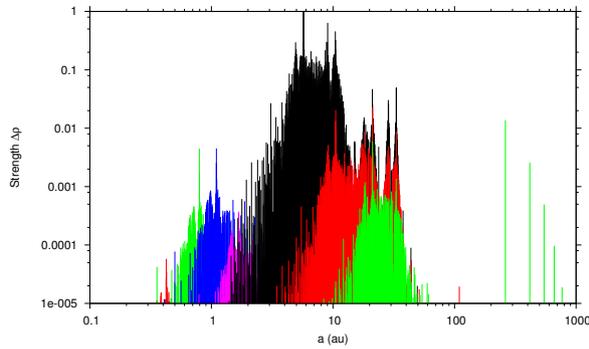


Fig. 11: Atlas de resonancias de tres cuerpos en el Sistema Solar. Las resonancias que involucran a Mercurio y a algún otro planeta, pocas y a la izquierda, están en rojo. Las que involucran a Venus y algún otro planeta externo a Venus en verde, en azul las de la Tierra con planetas externos, lila las de Marte, negro para las de Júpiter, rojo para las de Saturno y en verde las de Urano y Neptuno. Adaptado de Gallardo (2014).

las resonancias de dos cuerpos pues el número posible de combinaciones es mayor. Esto hace que en ciertas regiones del Sistema Solar la concentración de resonancias sea tan alta que para ciertas excentricidades comienza a haber superposición lo que lleva a una difusión caótica. Es interesante notar que la región menos densa de resonancias de dos y tres cuerpos dentro del sistema planetario es la región que coincide con el cinturón de asteroides (Fig. 12). Allí existen resonancias muy fuertes pero son pocas.

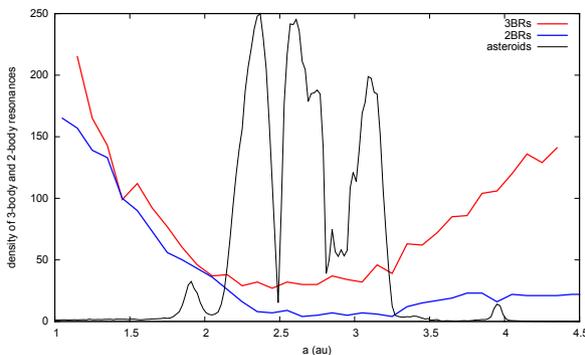


Fig. 12: Densidad de resonancias de dos y de tres cuerpos en la región de los asteroides superpuesta con un histograma de semiejes orbitales. Adaptado de Gallardo (2014).

## 5. Conclusiones

Existen infinitas combinaciones de conmensurabilidades en los objetos del Sistema Solar pero sólo algunas de éstas son dinámicamente relevantes y hallarlas es el principal desafío. Los objetos capturados en resonancias de movimientos medios ya sea por migración orbital o por evolución caótica presentan cierta resistencia a ser expulsados de las mismas, lo que genera concentraciones. Pero cuando la resonancia es muy inestable se genera

una falla y se convierte en una especie de región prohibida. Las inestabilidades pueden ser propias de la resonancia pero en general son producidas por resonancias seculares, secundarias o por el mecanismo KL actuando dentro de la misma. Para altas excentricidades orbitales el espacio de semiejes está saturado de resonancias por lo que objetos como los cometas suelen evolucionar en un mar de caos generado por la superposición de resonancias. Algunas resonancias seculares y el mecanismo KL, especialmente dentro de resonancias de movimientos medios, pueden generar grandes variaciones en  $(e, i)$  siendo una de las principales causas de la existencia de objetos rasantes con el Sol. Son también el principal mecanismo que genera asteroides con órbitas de colisión con la Tierra y meteoritos. En la región transneptuniana pueden ser la causa de la existencia de los objetos desacoplados como alternativa a la hipótesis de la existencia de un compañero solar no descubierto. Para órbitas de muy baja excentricidad las resonancias de dos cuerpos son tan débiles que las de tres cuerpos de orden cero pueden ser más fuertes como ocurre con los satélites Galileanos capturados en la resonancia Laplaciana. Varias gráficas, tablas y códigos para cálculo de resonancias están disponibles en <http://www.fisica.edu.uy/~gallardo/atlas/>.

*Agradecimientos:* Agradezco a los Comités Organizadores Local y Científico de la última Reunión de la AAA, por la invitación a participar de un estimulante encuentro y por su apoyo económico.

## Referencias

- Batygin K., 2015, MNRAS, 451, 2589  
 Beauge C., 1994, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 60, 225  
 Bottke Jr. W. F., et al., 2006, Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 34, 157  
 Carruba V., Michtchenko T. A., 2007, A&A, 475, 1145  
 Fernández J. A., et al., 2014, Icarus, 238, 1  
 Ferraz-Mello S., 1979, Dynamics of the Galilean satellites - an introductory treatise  
 Ferraz-Mello S., ed. 2007, Canonical Perturbation Theories - Degenerate Systems and Resonance Vol. 345 of Astrophysics and Space Science Library  
 Gallardo T., 2006, Icarus, 184, 29  
 Gallardo T., 2014, Icarus, 231, 273  
 Gallardo T., Hugo G., Pais P., 2012, Icarus, 220, 392  
 Gallardo T., et al., 2011, Icarus, 214, 632  
 Gomes R. S., et al., 2005, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 91, 109  
 Knezevic Z., et al., 1991, Icarus, 93, 316  
 Lykawka P. S., Mukai T., 2007, Icarus, 192, 238  
 Milić Žitnik I., Novaković B., 2016, ApJL, 816, L31  
 Morais M. H. M., Namouni F., 2013a, MNRAS, 436, L30  
 Morais M. H. M., Namouni F., 2013b, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 117, 405  
 Morbidelli A., 2002, Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics  
 Murray C. D., Dermott S. F., 1999, Solar system dynamics  
 Nesvorný D., et al., 2002, Asteroids III, pp 379-394  
 Nesvorný D., Morbidelli A., 1999, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 71, 243  
 Quillen A. C., 2011, MNRAS, 418, 1043  
 Smirnov E. A., Shevchenko I. I., 2013, Icarus, 222, 220  
 Soja R. H., et al., 2011, MNRAS, 414, 1059