

Teoría secular planetaria vs integrador numérico

HD 114783 y HD 202696

Rodrigo Cabral

18/07/23

Resumen

Se compara la evolución de la excentricidad de los exoplanetas pertenecientes a los sistemas HD 114783 y HD 202696, utilizando una teoría secular planetaria de segundo orden y el integrador numérico EVORB.

Introducción

Se puede demostrar (ver [1]) que para un sistema de dos planetas masivos con bajas inclinaciones, tales que $m_j \ll m_c$ (siendo m_j la masa del planeta j -ésimo y m_c la masa de la estrella central), la función perturbadora del planeta j -ésimo en aproximación de segundo orden, es:

$$\mathcal{R}_j = n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} (h_j^2 + k_j^2) + A_{jk} (h_j h_k + k_j k_k) + \frac{1}{2} B_{jj} (p_j^2 + q_j^2) + B_{jk} (p_j p_k + q_j q_k) \right] \quad (1)$$

donde $j = 1, 2$, $k = 2, 1 (k \neq j)$ y:

$$\begin{aligned} h_j &= e_j \sin \varpi_j, & k_j &= e_j \cos \varpi_j \\ p_j &= I_j \sin \Omega_j, & q_j &= I_j \cos \Omega_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{jj} &= +n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ A_{jk} &= -n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12}) \\ B_{jj} &= -n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \\ B_{jk} &= +n_j \frac{1}{4} \frac{m_k}{m_c + m_j} \alpha_{12} \bar{\alpha}_{12} b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) \end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha}_{12} = \alpha_{12}$ si $j = 1$ y $\bar{\alpha}_{12} = 1$ si $j = 2$. Expresando la función perturbadora de la manera mencionada, se llega a que los elementos h_j, k_j, p_j, q_j evolucionan con el tiempo como sigue:

$$h_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \sin(g_i t + \beta_i), \quad k_j = \sum_{i=1}^2 e_{ji} \cos(g_i t + \beta_i) \quad (2)$$

$$p_j = \sum_{i=1}^2 I_{ji} \sin(f_i t + \gamma_i), \quad q_j = \sum_{i=1}^2 I_{ji} \cos(f_i t + \gamma_i) \quad (3)$$

Donde g_i ($i = 1, 2$) son los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ (de elementos A_{ij}) y e_{ji} las componentes de los dos vectores propios de dicha matriz. Análogamente f_i corresponde a los valores propios de $\mathbf{B}$ (de componentes B_{ij}) e I_{ji} a las componentes de sus vectores propios.

HD 114783

El sistema HD 114783, según el NASA Exoplanet Archive, está compuesto por dos exoplanetas: HD 114783 b y HD 114783 c que orbitan entorno a la estrella HD 114783 de $0.87 M_{\odot}$. Información de interés respecto a la masa y órbita de los planetas se puede ver en la Tabla 1¹

Exoplaneta	$a[au]$	e	P[days]	$M \sin i[M_{\odot}]$
HD 114783 b	1.2	0.1	501	9.55×10^{-4}
HD 114783 c	4.97	0.114	4340	6.29×10^{-4}

Tabla 1: Información física de los planetas del sistema HD 114783

Dado que no tenemos información sobre las inclinaciones relativas entre los planetas, asumiremos $I_1 = I_2 = 0$, y de igual forma, $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0$. Adicionalmente:

$$\alpha_{12} = \frac{1.2}{4.97} = 0.2414$$

$$n_1 = \frac{360^{\circ}}{P_1} = 262^{\circ} yr^{-1}$$

$$n_2 = \frac{360^{\circ}}{P_2} = 30.28^{\circ} yr^{-1}$$

Con α_{12} podemos calcular los coeficientes de Laplace $b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12})$ y $b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12})$ quedando:

$$b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) = 0.8106$$

$$b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12}) = 0.2428$$

Con los que las matrices **A** y **B** quedan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.002234 & -0.0006692 \\ -0.0004866 & 0.001625 \end{pmatrix} {}^{\circ} yr^{-1} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.002234 & 0.002234 \\ 0.001625 & -0.001625 \end{pmatrix} {}^{\circ} yr^{-1}$$

De donde salen los valores propios:

$$g_1 = 2.5763 \times 10^{-3} {}^{\circ} yr^{-1} \quad g_2 = 1.2827 \times 10^{-3} {}^{\circ} yr^{-1}$$

$$f_1 = 0 {}^{\circ} yr^{-1} \quad f_2 = -3.859 \times 10^{-3} {}^{\circ} yr^{-1}$$

Como trabajamos con el caso plano, no nos vamos a centrar en los vectores propios asociados a **B**, sino que solamente en los asociados a **A**:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_{11} \\ \bar{e}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.955 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{e}_{12} \\ \bar{e}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.703457 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ahora bien, los e_{ji} que vamos utilizar surgen de escalar los vectores de la Ecuación 4 con un factor de conversión S_i que vendrá dado por las condiciones iniciales de los exoplanetas.

La Ecuación 2 queda entonces:

$$h_j = S_1 \bar{e}_{j1} \sin(g_1 t + \beta_1) + S_2 \bar{e}_{j2} \sin(g_2 t + \beta_2) \quad k_j = S_1 \bar{e}_{j1} \cos(g_1 t + \beta_1) + S_2 \bar{e}_{j2} \cos(g_2 t + \beta_2)$$

¹Los parámetros indicados corresponden con los valores medios reportados. No se consideran las incertidumbres.

Y tenemos como condición inicial:

$$h_j|_{t=0} = 0 \quad k_j|_{t=0} = e_j = \begin{cases} 0.1 & \text{si } j = 1 \\ 0.114 & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Lo que da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = S_1 \bar{e}_{11} \sin \beta_1 + S_2 \bar{e}_{12} \sin \beta_2 \\ 0 = S_1 \bar{e}_{21} \sin \beta_1 + S_2 \bar{e}_{22} \sin \beta_2 \\ 0.1 = S_1 \bar{e}_{11} \cos \beta_1 + S_2 \bar{e}_{12} \cos \beta_2 \\ 0.114 = S_1 \bar{e}_{21} \cos \beta_1 + S_2 \bar{e}_{22} \cos \beta_2 \end{cases}$$

De lo que sale:

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \quad S_1 = -0.0074501, S_2 = 0.12145$$

y, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01456504 \\ -0.00745015 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0854349 \\ 0.1214501 \end{pmatrix}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $e_j = (h_j^2 + k_j^2)^{1/2}$ y los valores g_1 y g_2 previamente calculados:

$$e_1(t) = \sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2 + 2e_{11}e_{12}(\sin g_1 t \sin g_2 t + \cos g_1 t \cos g_2 t)}$$

$$e_2(t) = \sqrt{e_{21}^2 + e_{22}^2 + 2e_{21}e_{22}(\sin g_1 t \sin g_2 t + \cos g_1 t \cos g_2 t)}$$

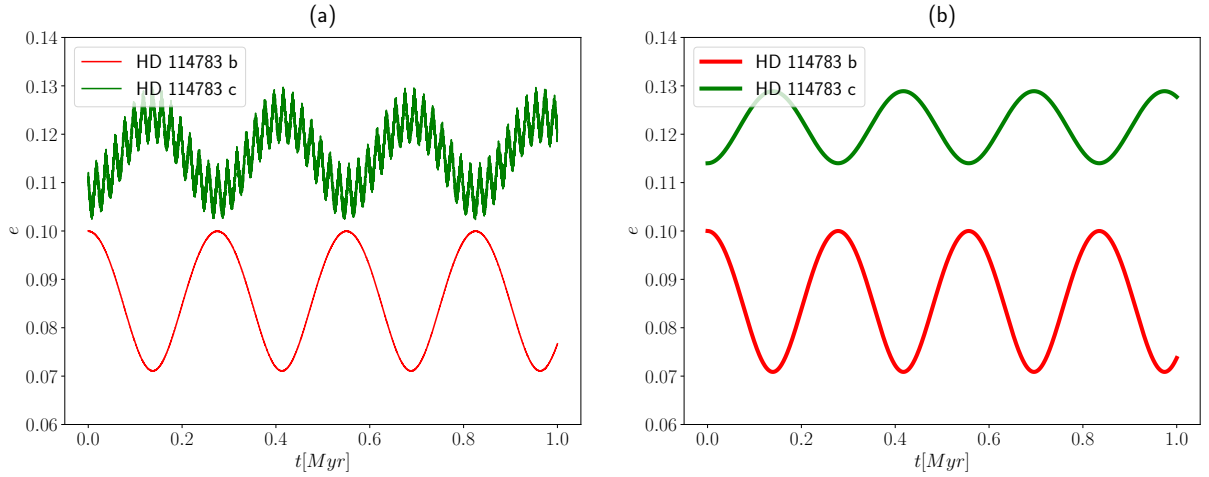


Figura 1: (a): Evolución de la excentricidad como función del tiempo para los exoplanetas del sistema HD 114783 según EVORB. (b): Evolución de la excentricidad como función del tiempo para los exoplanetas del sistema HD 114783 según la teoría secular descrita en este trabajo.

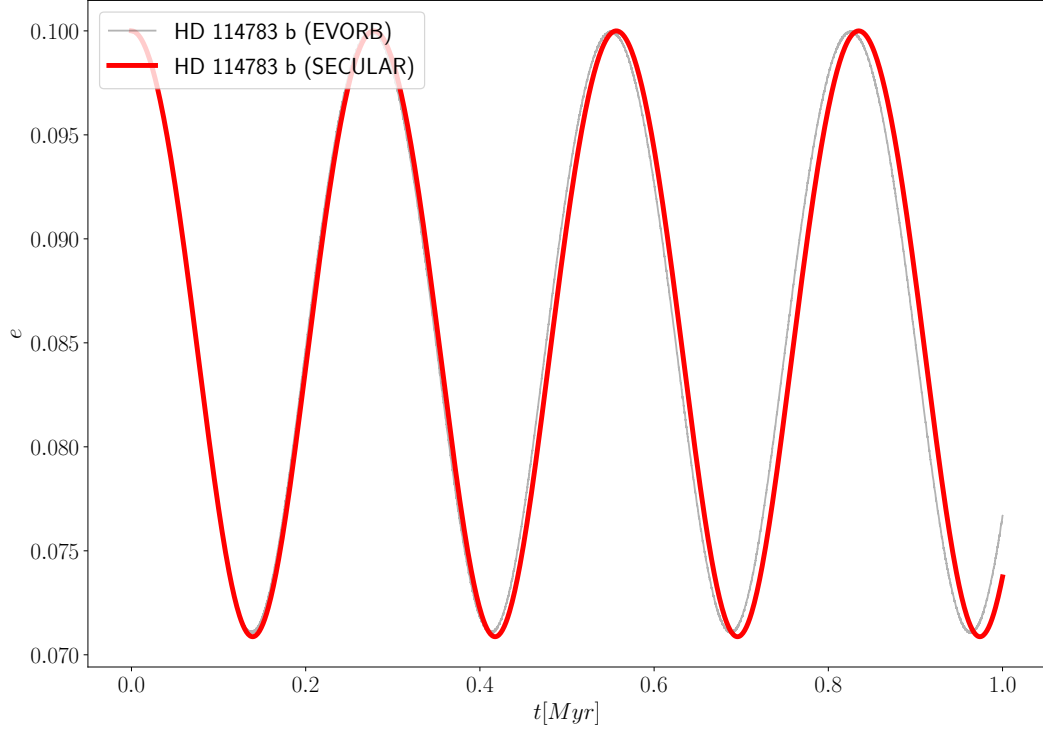


Figura 2: Evolución secular de la excentricidad del exoplaneta HD 114783 b (línea roja continua), superpuesto a la evolución real obtenida con EVORB.

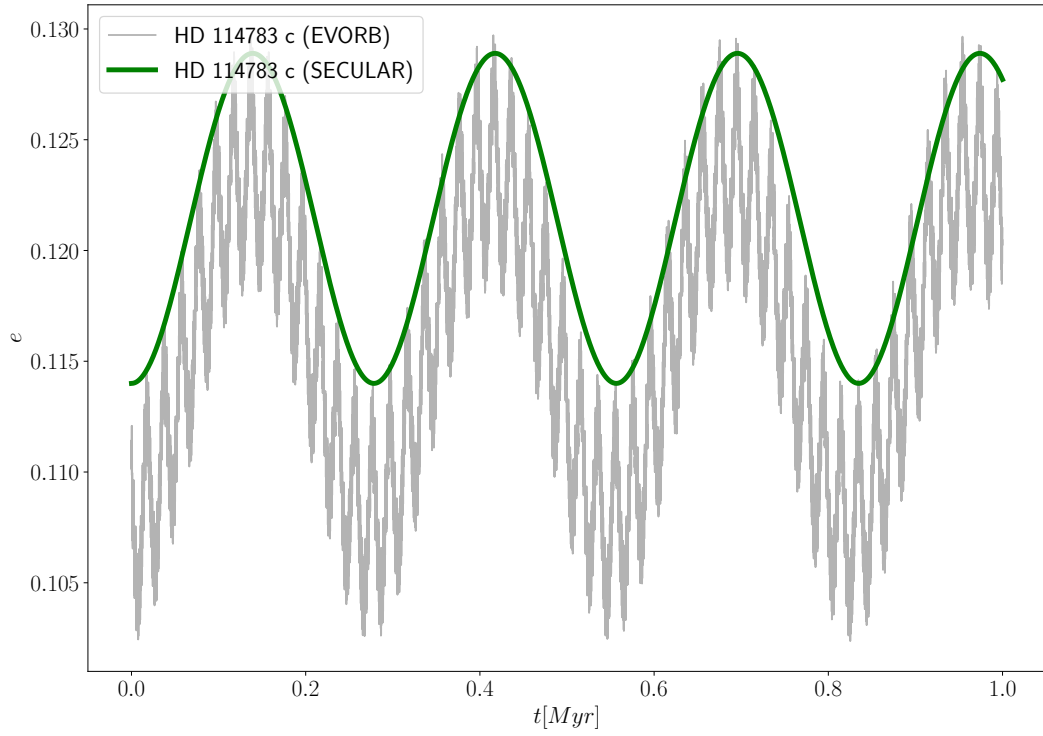


Figura 3: Evolución secular de la excentricidad del exoplaneta HD 114783 c (línea verde continua), superpuesto a la evolución real obtenida con EVORB.

HD 202696

El sistema HD 202696, según el NASA Exoplanet Archive, está compuesto por dos exoplanetas: HD 202696 b y HD 202696 c que orbitan entorno a la estrella HD 202696 de $1.91 M_{\odot}$. Información de interés respecto a la masa y órbita de los planetas se puede ver en la Tabla 2

Exoplaneta	$a[au]$	e	P[days]	$M \sin i[M_{\odot}]$
HD 202696 b	1.57	0.011	517	1.906×10^{-3}
HD 202696 c	2.34	0.028	946.6	1.780×10^{-3}

Tabla 2: Información física de los planetas del sistema HD 202696

Nuevamente, al no tener información sobre las inclinaciones relativas entre los planetas, asumiremos $I_1 = I_2 = 0$, y de igual forma, $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_1 = \omega_2 = 0$. Adicionalmente:

$$\alpha_{12} = \frac{1.57}{2.34} = 0.6709$$

$$n_1 = \frac{360^{\circ}}{P_1} = 254.2^{\circ} yr^{-1}$$

$$n_2 = \frac{360^{\circ}}{P_2} = 138.8^{\circ} yr^{-1}$$

Con α_{12} podemos calcular los coeficientes de Laplace $b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12})$ y $b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12})$ quedando:

$$b_{3/2}^{(1)}(\alpha_{12}) = 6.2568$$

$$b_{3/2}^{(2)}(\alpha_{12}) = 4.9007$$

Con los que las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ quedan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.16662 & -0.13050 \\ -0.11376 & 0.14524 \end{pmatrix} {}^{\circ} yr^{-1} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.16662 & 0.16662 \\ 0.14524 & -0.14524 \end{pmatrix} {}^{\circ} yr^{-1}$$

De donde salen los valores propios:

$$g_1 = 0.27824^{\circ} yr^{-1}$$

$$f_1 = 0 {}^{\circ} yr^{-1}$$

$$g_2 = 0.033619^{\circ} yr^{-1}$$

$$f_2 = -0.31186^{\circ} yr^{-1}$$

Como trabajamos con el caso plano, nuevamente no nos vamos a centrar en los vectores propios asociados a $\mathbf{B}$, sino que solamente en los asociados a $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_{11} \\ \bar{e}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1691 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{e}_{12} \\ \bar{e}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.98120 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ahora bien, los e_{ji} que vamos utilizar surgen de escalar los vectores de la Ecuación 5 con un factor de conversión S_i que vendrá dado por las condiciones iniciales de los exoplanetas.

La Ecuación 2 queda entonces:

$$h_j = S_1 \bar{e}_{j1} \sin(g_1 t + \beta_1) + S_2 \bar{e}_{j2} \sin(g_2 t + \beta_2) \quad k_j = S_1 \bar{e}_{j1} \cos(g_1 t + \beta_1) + S_2 \bar{e}_{j2} \cos(g_2 t + \beta_2)$$

Y tenemos como condición inicial:

$$h_j|_{t=0} = 0 \quad k_j|_{t=0} = e_j = \begin{cases} 0.011 & \text{si } j = 1 \\ 0.028 & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Lo que da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = S_1 \bar{e}_{11} \sin \beta_1 + S_2 \bar{e}_{12} \sin \beta_2 \\ 0 = S_1 \bar{e}_{21} \sin \beta_1 + S_2 \bar{e}_{22} \sin \beta_2 \\ 0.011 = S_1 \bar{e}_{11} \cos \beta_1 + S_2 \bar{e}_{12} \cos \beta_2 \\ 0.028 = S_1 \bar{e}_{21} \cos \beta_1 + S_2 \bar{e}_{22} \cos \beta_2 \end{cases}$$

De lo que sale:

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \quad S_1 = 0.0076611, S_2 = 0.020339$$

y, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0089566 \\ 0.0076611 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.019957 \\ 0.020339 \end{pmatrix}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $e_j = (h_j^2 + k_j^2)^{1/2}$ y los valores g_1 y g_2 previamente calculados:

$$e_1(t) = \sqrt{e_{11}^2 + e_{12}^2 + 2e_{11}e_{12}(\sin g_1 t \sin g_2 t + \cos g_1 t \cos g_2 t)}$$

$$e_2(t) = \sqrt{e_{21}^2 + e_{22}^2 + 2e_{21}e_{22}(\sin g_1 t \sin g_2 t + \cos g_1 t \cos g_2 t)}$$

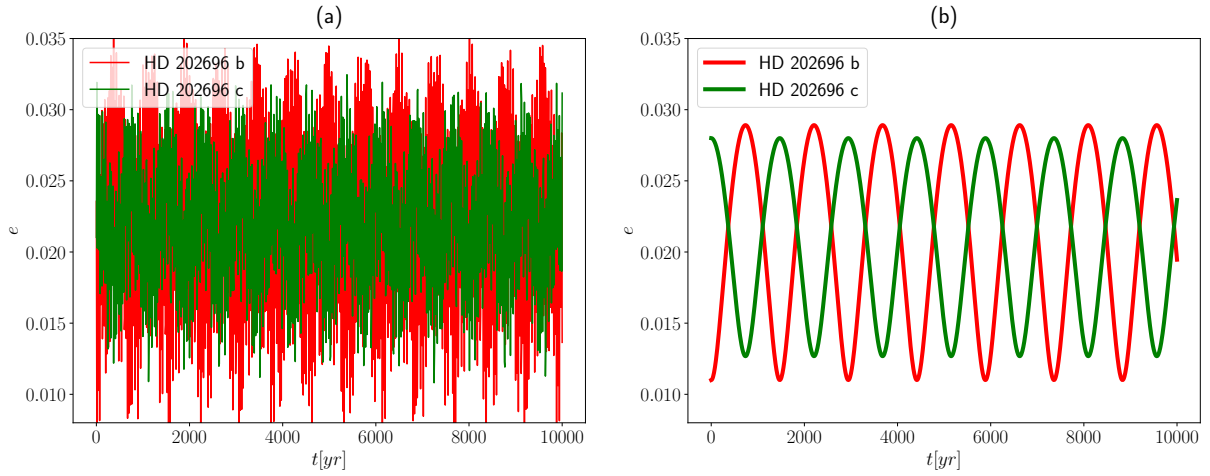


Figura 4: (a): Evolución de la excentricidad como función del tiempo para los exoplanetas del sistema HD 202696 según EVORB. (b): Evolución de la excentricidad como función del tiempo para los exoplanetas del sistema HD 202696 según la teoría secular descrita en este trabajo.

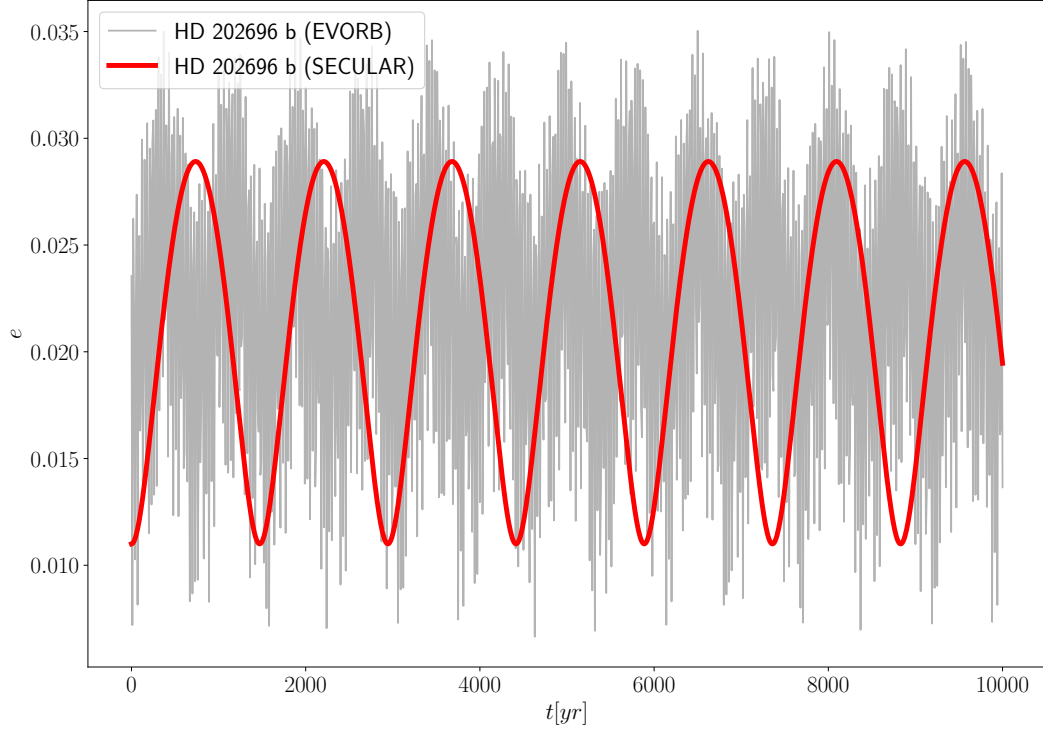


Figura 5: Evolución secular de la excentricidad del exoplaneta HD 202696 b (línea roja continua), superpuesto a la evolución real obtenida con EVORB.

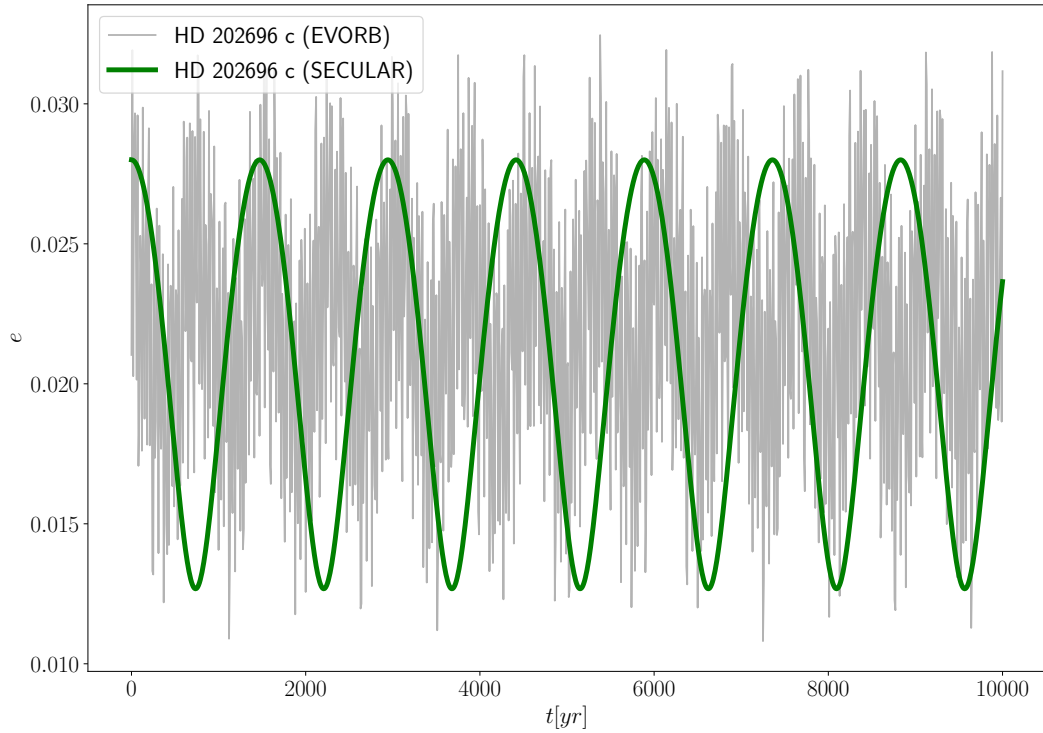


Figura 6: Evolución secular de la excentricidad del exoplaneta HD 202696 c (línea verde continua), superpuesto a la evolución real obtenida con EVORB.

Discusión y conclusiones

HD 114783

El sistema HD 114783 (ver Tabla 1), no presenta conmensurabilidad evidente en sus periodos (501 días y 4340 días para HD 114783 b y HD 114783 c respectivamente), con lo que no es de esperar la presencia de efectos resonantes notorios en su evolución. Por esta razón, vemos que la evolución predicha por EVORB y la predicha por el modelo secular son muy similares (ver Figura 1), exceptuando el caso del exoplaneta HD 114783 c (ver Figura 3), que presenta una oscilación adicional de periodo más corto. Dicha oscilación pueden ser producida por efectos seculares de mayor orden (ya que las excentricidades de ambos planetas no son muy bajas) y podría hacerse presente si se consideran más órdenes en el desarrollo de la $\mathcal{R}_{sec}$.

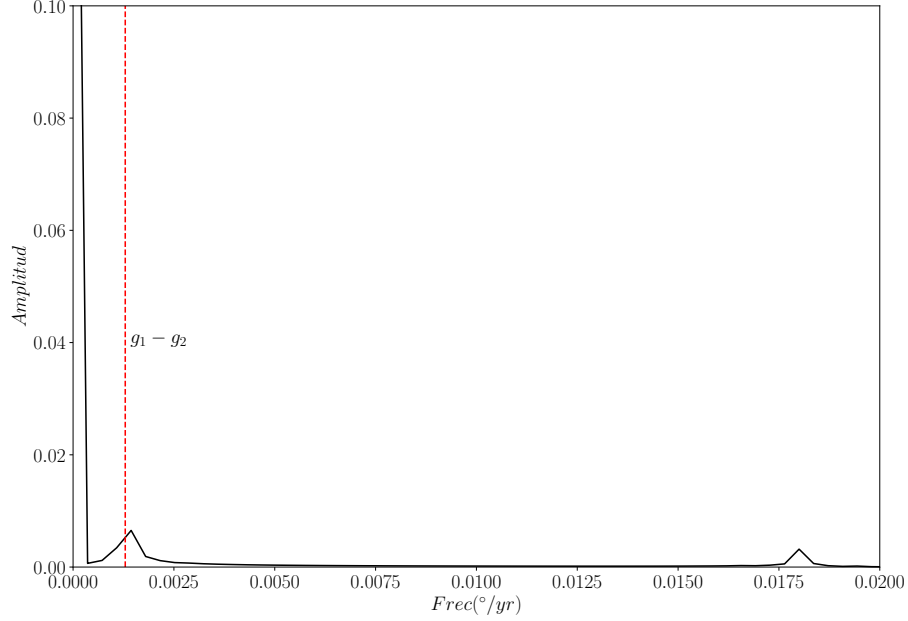


Figura 7: Espectro de frecuencias de la excentricidad del exoplaneta HD 114783 c predicho por EVORB. La línea discontinua roja indica la frecuencia calculada con el modelo secular.

Teniendo en cuenta que la forma funcional de la excentricidad según el modelo secular es:

$$e(t) = \sqrt{a + b(\sin g_1 t \sin g_2 t + \cos g_1 t \cos g_2 t)}$$

y que $\sin g_1 t \sin g_2 t + \cos g_1 t \cos g_2 t = \cos(g_1 - g_2)t$

$$\implies e(t) = \sqrt{a + b \cos(g_1 - g_2)t}$$

O lo que es lo mismo, la frecuencia característica de la evolución secular de la excentricidad es $g_1 - g_2$. Una comparación entre dicha frecuencia y las indicadas en el espectro de frecuencias de HD 114783 c puede verse en la Figura 7, donde hay una buena correspondencia entre el primer pico del espectro y la frecuencia calculada.

HD 202696

Contrario al sistema anteriormente mencionado, HD 202696 tiene exoplanetas con periodos cercanos a la resonancia 2:1 (517 días y 946.6 días para HD 202696 b y HD 202696 c respectivamente), con lo que es de esperar una evolución dominada por componentes de alta frecuencia. Por esta razón, las comparaciones entre EVORB y el modelo secular muestran muchas diferencias (ver Figura 5 y Figura 6). Pese a esto, se encuentra que el modelo secular logra dar una buena aproximación a la componente de largo periodo de la evolución (concretamente, reproduce correctamente la amplitud de las oscilaciones de la excentricidad),

pero, si se compara la frecuencia característica del modelo secular, $g_1 - g_2$, con lo indicado por el espectro de frecuencias, se ve una discrepancia (Figura 8 para el caso de HD 202696 b). Concretamente, se encuentra que la evolución predicha por EVORB tiene una componente secular (de baja frecuencia) con una frecuencia **mayor** a la predicha por el modelo.

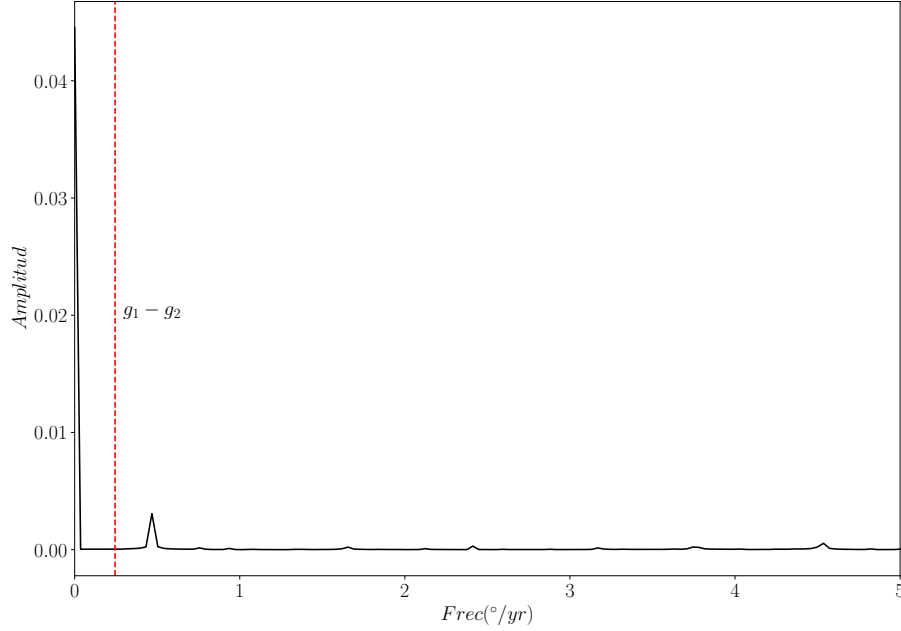


Figura 8: Espectro de frecuencias de la excentricidad del exoplaneta HD 202696 b predicho por EVORB. La línea discontinua roja indica la frecuencia calculada con el modelo secular.

La no perfecta correspondencia entre la evolución del modelo y la integración numérica, puede deberse a distintos factores, dentro de los cuales se destaca que:

- El semieje no es constante (premisa fundamental para la evolución secular)
- Los términos resonantes pueden tener un efecto de largo periodo (evolución secular resonante)

En síntesis, se encuentra que la teoría secular de segundo orden descrita por [1] puede explicar correctamente la evolución a largo plazo de sistemas sin commensurabilidad apreciable entre sus periodos, pero falla para los casos cercanos a resonancias.

Referencias

- [1] Carl D. Murray and Stanley F. Dermott. *Secular Perturbations*, page 274–320. Cambridge University Press, 2000.