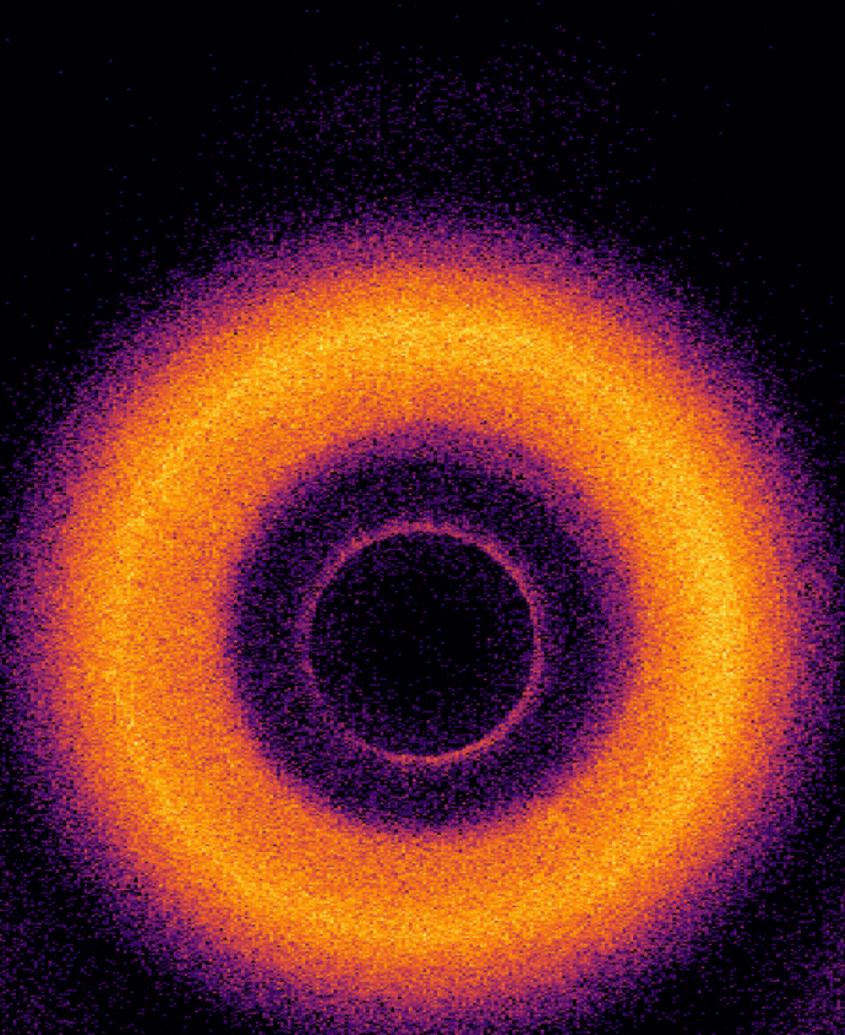

Descomposición de Fourier de los cinturones de asteroides

Tarea final de Mecánica Celeste

Autor

Mauro Cabrera



0.1. Introducción

En este trabajo se estudia en coordenadas cilíndricas la disposición en el espacio y cinemática de los asteroides en el cinturón principal del Sistema Solar. Para ello se utilizan los catálogos de asteroides numerados y sin numerar del JPL de la NASA "Small-Body Database"¹

0.2. Disposición en el espacio

0.2.1. Transformaciones de coordenadas

Dado que la información de los asteroides está dada en elementos orbitales $(a, e, I, \omega, \Omega, M)$, debemos traducirlo a coordenadas cilíndricas, para ello primero transformamos a cartesianas y de allí a cilíndricas.

Nuestro objetivo es pasar de elementos orbitales a coordenadas cilíndricas,

$$(a, e, I, \omega, \Omega, M) \rightarrow (R, \phi, Z, V_R, V_\phi, V_z)$$

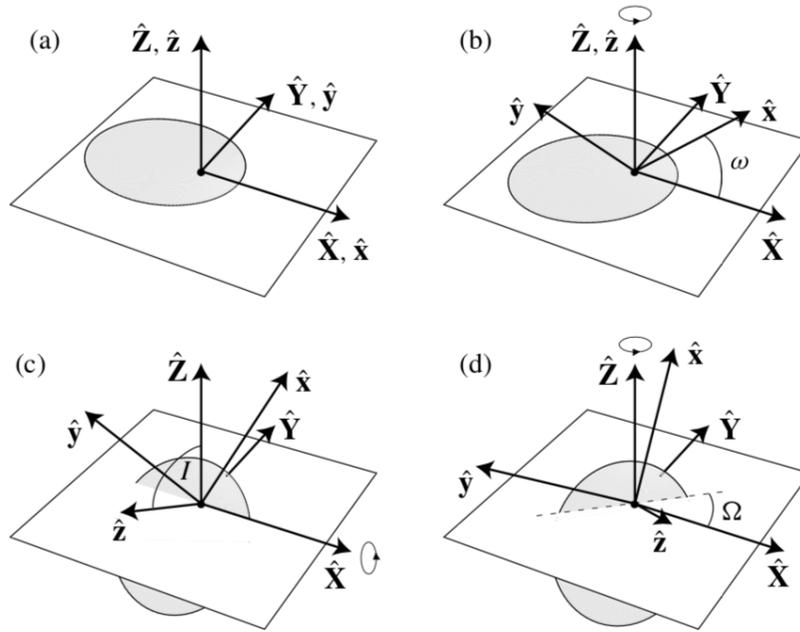


Figura 1: Rotaciones de la orbita para pasarla del sistema de coordenadas intrínsecas a la orbita (x, y) a cartesianas (X, Y, Z) . Figura tomada del Solar System Dynamics de Carl D. Murray, Stanley F. Dermott (1999) Fig: 2.14.

Para ello partimos recordando que en las coordenadas intrínsecas a la elipse Kepleriana se cumple

$$x = a(\cos E - e) \tag{1}$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \tag{2}$$

¹https://ssd.jpl.nasa.gov/sb/elem_tables.html

Para obtener E resolvemos numéricamente la ecuación de Kepler $M = E - e \sin E$, con las coordenadas x, y resueltas podemos aplicarle las rotaciones descritas en SSD 2.8 para obtener la orbita orientada en el espacio. Siguiendo la Fig.1 vemos que la primera rotación P_1 pone al perihelio fuera del eje X , la rotación P_2 da la inclinación de la orbita y P_3 da la orientación de la línea de los nodos. Estas rotaciones se traducen a matrices como

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo cual

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

En concreto tenemos que

$$X = x(\cos \omega \cos \Omega - \sin \Omega \sin \omega \cos I) - y(\sin \omega + \sin \Omega \cos \omega \cos I)$$

$$Y = x(\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos I) + y(\cos \Omega \cos \omega \cos I - \sin \omega \sin \Omega)$$

$$Z = x \sin \omega \sin I + y \cos \omega \sin I$$

Esto nos da las coordenadas cartesianas referentes a la Eclíptica y al punto Aries.

Dado que instantáneamente los elementos orbitales no cambian, las derivadas de X, Y, Z solo dependerán de \dot{x}, \dot{y} , las cuales se pueden derivar de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \sin E \dot{E} \\ \dot{y} &= a \sqrt{1 - e^2} \cos E \dot{E} \end{aligned}$$

Como

$$M = E - e \sin E \Rightarrow \dot{M} = (1 - e \cos E) \dot{E}$$

$$M = n(t - \tau) \Rightarrow \dot{M} = n = \sqrt{\mu/a^3}$$

Con las unidades de masa en masas solares, el tiempo en años y la distancia en ua tenemos que $\mu = 4\pi^2$ (naturalmente obviamos la masa del asteroide en el termino μ) Entonces

$$\dot{E} = \frac{2\pi}{a^{3/2}(1 - e \cos E)}$$

Entonces

$$\dot{x} = -\frac{2\pi \sin E}{a^{1/2}(1 - e \cos E)} \quad \dot{y} = \frac{2\pi \sqrt{1 - e^2} \cos E}{a^{1/2}(1 - e \cos E)}$$

Finalmente tenemos las velocidades en coordenadas cartesianas escritas en términos de los elementos orbitales

$$V_X = \frac{2\pi}{a^{1/2}(1 - e \cos E)} \left[\sin E (\cos \omega \cos \Omega - \sin \Omega \sin \omega \cos I) - \sqrt{1 - e^2} \cos E (\sin \omega + \sin \Omega \cos \omega \cos I) \right]$$

$$V_Y = \frac{2\pi}{a^{1/2}(1 - e \cos E)} \left[\sin E (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos I) + \sqrt{1 - e^2} \cos E (\cos \Omega \cos \omega \cos I - \sin \omega \sin \Omega) \right]$$

$$V_Z = \frac{2\pi}{a^{1/2}(1 - e \cos E)} (\sin E \sin \omega \sin I + \sqrt{1 - e^2} \cos E \cos \omega \sin I)$$

Finalmente para transformar a cilíndricas tenemos las siguientes ecuaciones, donde ϕ es creciente desde los $X > 0$ hacia $Y > 0$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\phi = \arctan 2(Y, X)$$

$$\begin{pmatrix} V_R \\ V_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} \quad (4)$$

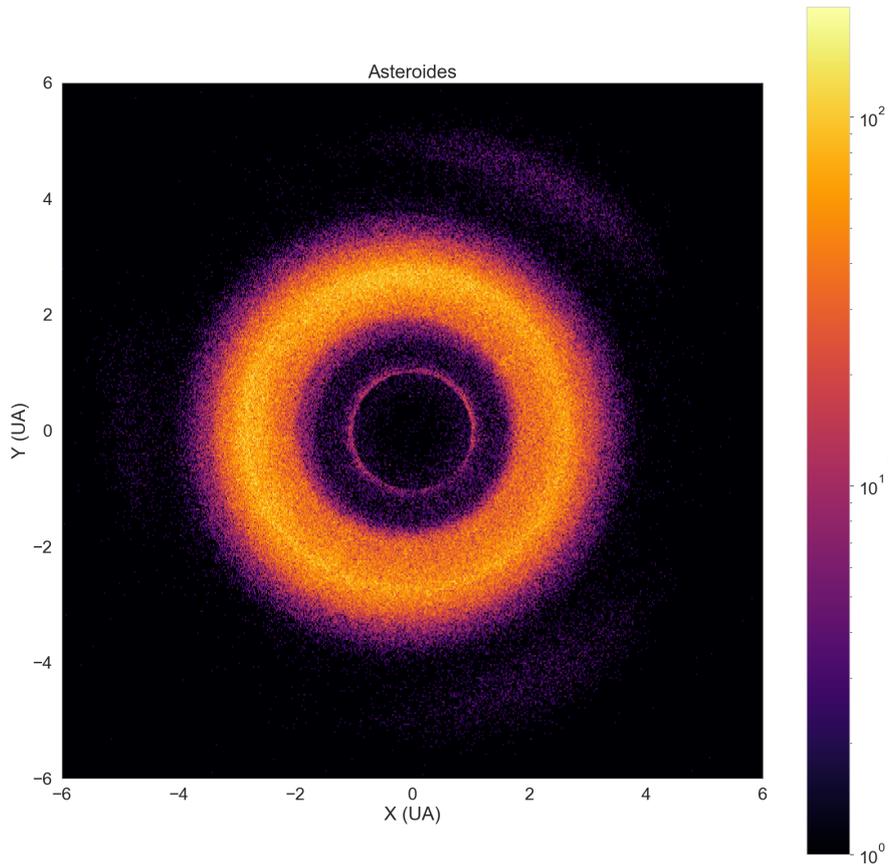


Figura 2: Plano XY de los asteroides del sistema solar interno.

En la Fig.2 se grafica la densidad numérica de los asteroides con $a < 6$ en el plano XY . Notamos que la disposición de los asteroides tiene una simetría axial notoria respecto al eje X . Cuatro estructuras quedan evidentes en la Fig.2, el cinturón de asteroides donde está la mayor densidad numérica de ellos, los dos lóbulos de los Troyanos ($R \approx 5$ ua y $X \gtrsim 0$ ua), una punta del triangulo de las Hildas en $Y \approx 0$ ua $X \approx -5$ ua, y por ultimo notamos un pequeño cinturón en $R \approx 1$ ua, este cinturón está compuesto mayormente de los asteroides llamados en inglés Atens, Apollos y Amors (A. Mrobidelli et al. 2002 'Origin and Evolution of Near-Earth Objects'), estas familias de NEOs (Near-Earth Objects) son los que se encuentran contenidos (y en el entorno de ellas) entre las curvas azules de la Fig. 4 que marcan los objetos que tienen perihelio o afelio de 1 ua. Por ultimo la muestra de asteroides que trabajamos también tiene asteroides con distancias mas allá de Júpiter (el cual se encuentra en $X \approx 5$ ua, $Y \approx 0$ ua) y de Neptuno, los cuales se muestran en la Fig.3, estos objetos están dominados por los transneptunianos los cuales vamos a ignorar en el presente trabajo (para no extendernos).

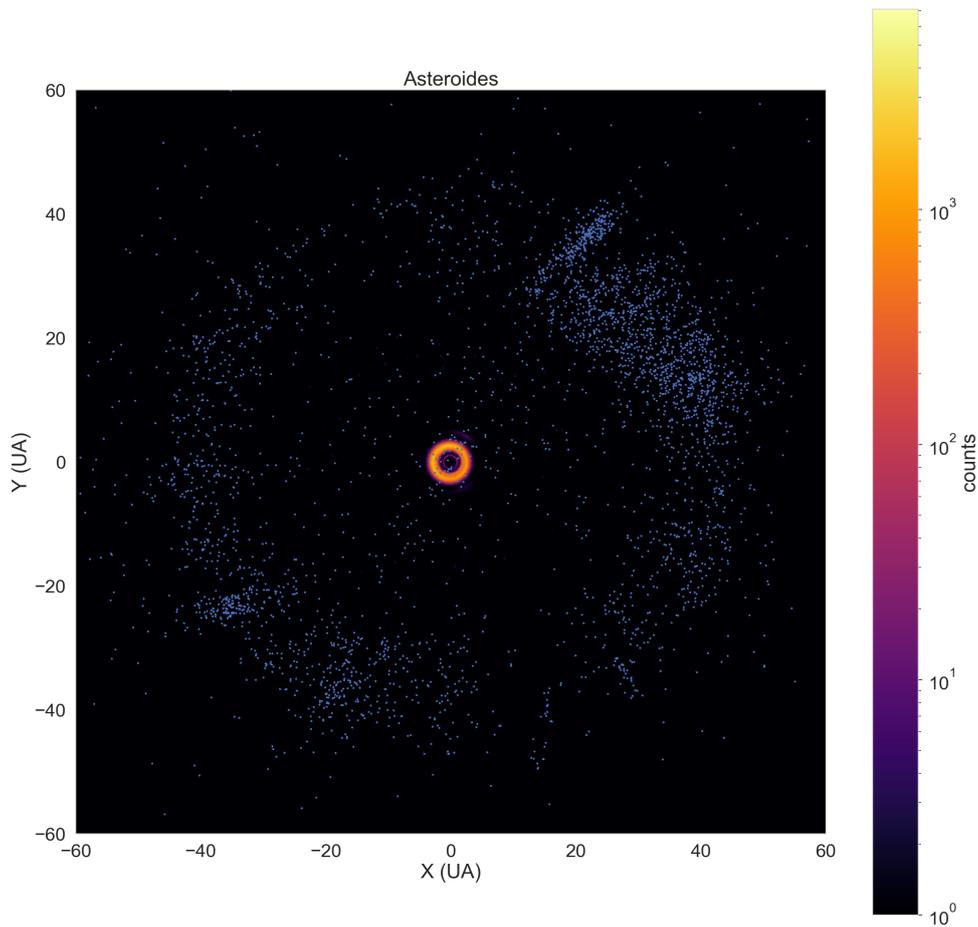


Figura 3: Plano XY

0.2.2. Alabeo del cinturón de asteroides

Para estudiar el alabeo en el cinturón de asteroides describiremos la altura media de los asteroides respecto al plano de la Eclíptica con una suma de Fourier, es decir

$$\bar{Z} = \sum_{n=0}^N A_n \sin(n\phi - \phi_n) \quad (5)$$

Las amplitudes y fases se obtienen mediante la linealización de la serie y obteniendo mediante mínimos cuadrados las amplitudes de los modos, para más detalles el procedimiento se explica en la monografía "Descomposición de Fourier del alabeo en el disco Galactico trazado por Cefeidas" Mauro Cabrera 2021 ².

La serie Ec.5 se ajusta en anillos radiales que son disjuntos entre si y por lo tanto cada ajuste es independiente del resto. Los anillos se forman de tal forma que cada uno tenga cierta cantidad M de asteroides en el, en este caso tomamos $M = 22000$ y $N = 2$. En este trabajo dada la cobertura azimutal de la muestra no hay correlación apreciable entre los ajuste de cada modo, por lo cual podemos decir con seguridad que son independientes entre si.

Notemos que la altura Z de los asteroides se mide respecto al plano de la Eclíptica, el cual no tiene ninguna preferencia para analizar a los asteroides. Por lo cual es importante entender qué resultados podemos esperar de \bar{Z} dado que no estamos en el plano de referencia indicado para el análisis de los asteroides. Observemos lo siguiente, si los asteroides están contenidos en un plano que no es la Eclíptica, entonces lo que observaríamos es que el modo $n = 1$ o el modo $n = 0$ son los dominantes y no varían con el radio, ya que el modo $n = 0$ sin variaciones radiales implica que los asteroides están en un plano paralelo al de la Eclíptica pero desfasado en Z .

Para saber como se describe un plano con Fourier podemos tomar la expresión del vector posición en cartesianas con Z descrita por una suma de Fourier e imponerle que sea perpendicular a un vector $\hat{\mathbf{n}}$ que caracteriza a un plano arbitrario. De este modo obtenemos las condiciones sobre los modos para obtener un plano. Entonces

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ \sum_{n=0}^N A_n \sin(n\phi - \phi_n) \end{pmatrix}$$

Naturalmente las amplitudes y las fases dependen de R .

Para que (X, Y, Z) describan un plano debe cumplirse que $aX + bY + cZ = d$ donde $\hat{\mathbf{n}} = (a, b, c)$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} aR \cos \phi + bR \sin \phi + c \sum_{n=0}^N A_n \sin(n\phi - \phi_n) &= d \\ \sum_{n=0}^N A_n \sin(n\phi - \phi_n) &= d - \frac{R}{c} (a \cos(\phi) + b \sin(\phi)) \\ \sum_{n=0}^N A_n \sin(n\phi - \phi_n) &= d - R \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \sin(\phi - \alpha) \end{aligned}$$

con $\alpha = \arctan 2(-a, b)$, utilizando la ortogonalidad de los modos de Fourier obtenemos

$$A_n = -R \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \delta_{1n} \quad \forall n > 0$$

²<https://drive.google.com/file/d/1-whaSjbxWdL4G8kwCUhHfhIZ9foHvdgN/view>

$$\phi_n = \arctan 2(-a, b)\delta_{1n} \quad \forall n > 0$$

$$A_0 \sin(-\phi_0) = d$$

Entonces vemos que si $A_1 \propto R$, $\phi_1 = cte$ y $A_0 \sin(-\phi_0) = cte$ entonces los asteroides están contenidos en un único plano definido por el vector normal $\hat{\mathbf{n}}$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}} \begin{pmatrix} A \sin \phi_1 \\ -A \cos \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con $A = \frac{A_1}{R}$. Diremos que los asteroides presentan alabeo si el comportamiento de A_1 , ϕ_1 , $A_0 \sin(-\phi_0)$ y $A_{n>1}$ no son consistentes con los de un plano.

Alabeo

Como se observa en la Fig. 4 los asteroides que corresponden al cinturón de asteroides son aquellos con semiejes en el rango de (2.1, 3.3) ua, y como es sabido, el cinturón se divide en tres regiones principales debido a las resonancias que provocan los baches de Kirkwood, estas regiones son:

- Cinturón interno: $2.1ua < a < 2.5ua$, están entre las resonancias 4 : 1 y la 3 : 1 con Júpiter
- Cinturón medio: $2.5ua < a < 2.82ua$ están entre las resonancias 3 : 1 y la 5 : 2 con Júpiter
- Cinturón externo: $2.82ua < a < 3.3ua$ están entre las resonancias 5 : 2 y la 2 : 1 con Júpiter

El análisis del alabeo lo dividimos en 4 muestras principales, la primera son todos los asteroides del cinturón (i.e. $2.1 < a/ua < 3.3$) y las tres muestras restantes son las subdivisiones del cinturón (i.e. interno, medio y externo). Estas regiones se marcan en la Fig.4 con rectas verticales grises (que marcan las resonancias 4 : 1, 3 : 1, 5 : 2 y 2 : 1 en orden creciente de semieje), y en la Fig.5 se grafica la densidad numérica de cada cinturón en el plano XY , lo primero que notamos es que no son circulares, sino que se representarían mejor con una elipse con su perihelio cercano a $Y = 0$ y $X > 0$ (en la dirección de Júpiter), además de la densidad numérica notamos que hay más asteroides en los extremos de $X < 0$, lo cual se debe a que los asteroides allí deben estar en promedio pasando por su afelio, y como pasan con menor velocidad es más probable observarlos allí. En la Fig.6 graficamos la proyección de los asteroides en el plano XZ , claramente ningún cinturón tiene su altura media contenida en el plano de la Eclíptica, es por ello que debemos analizar si se contiene en un plano o directamente no existe un único plano que pueda describir su altura media.

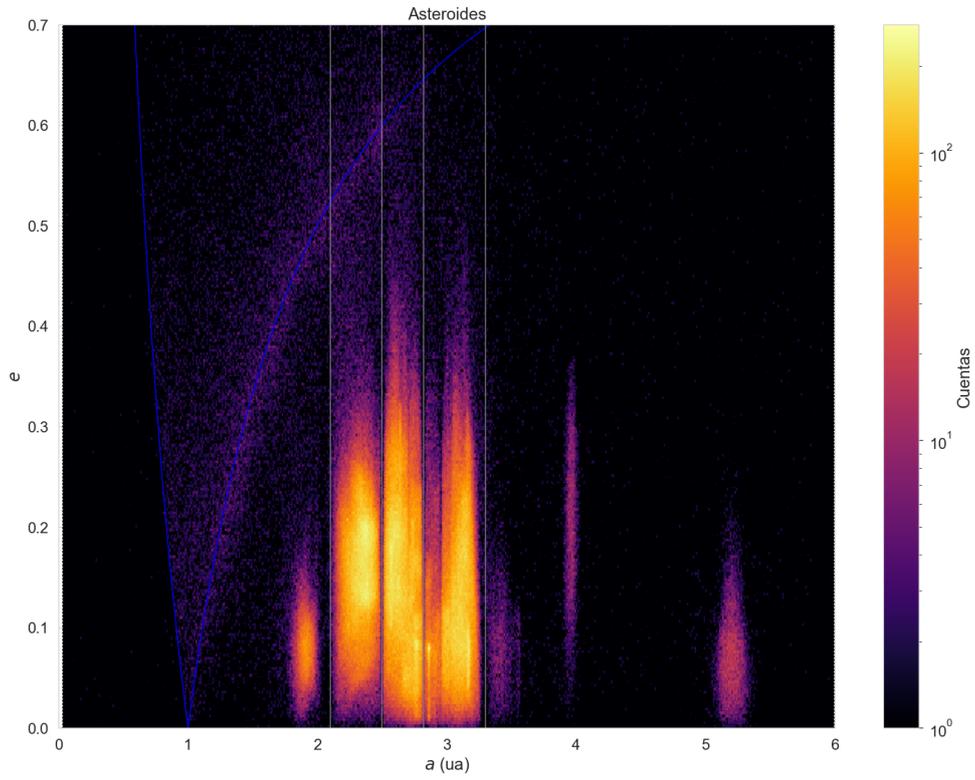


Figura 4: Distribución de los elementos orbitales a, e para los asteroides del sistema solar interno

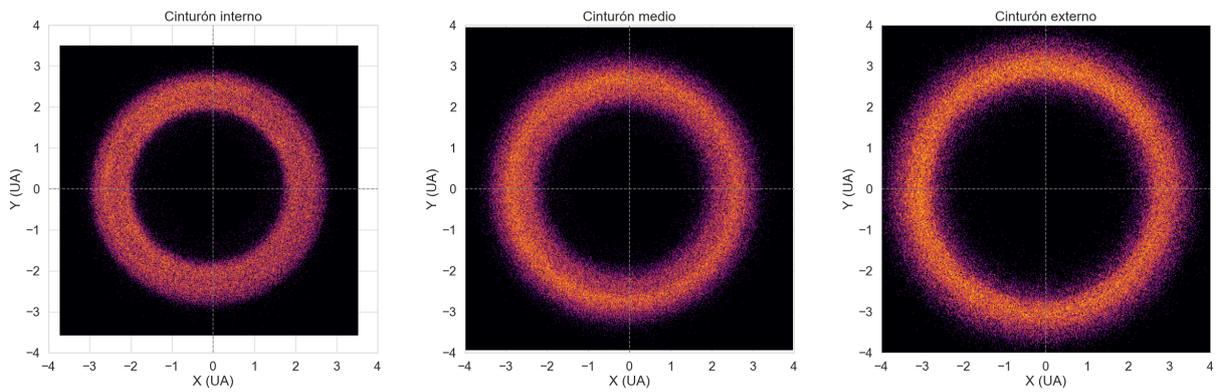


Figura 5: Distribución en plano de la eclíptica de los asteroides de cada cinturón

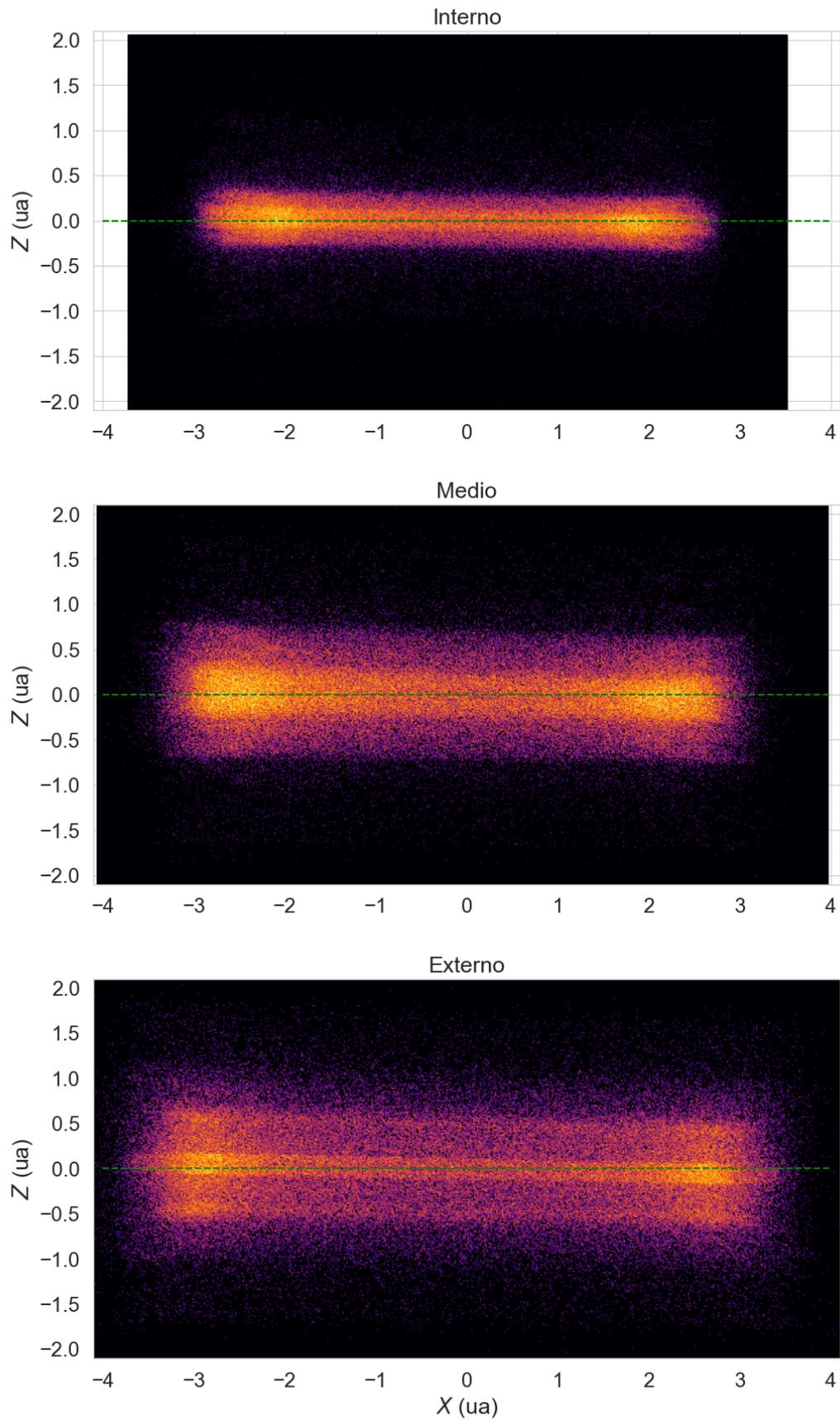


Figura 6: Distribución en el plano XZ de los asteroides de cada cinturón

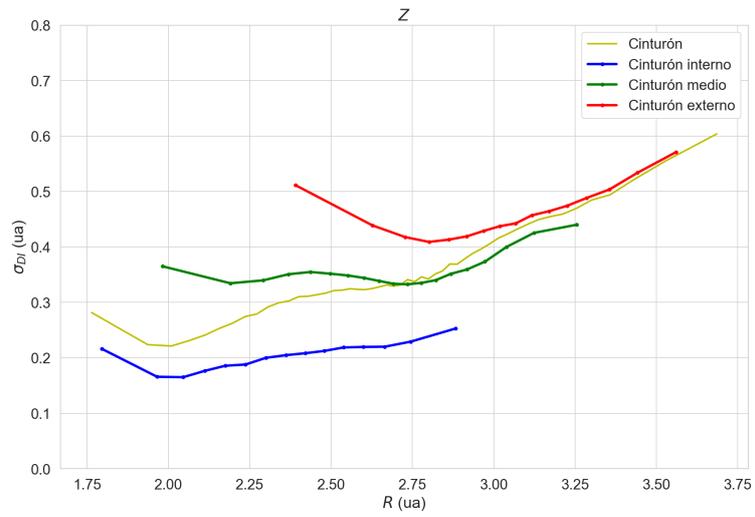


Figura 7: Dispersión de Z para los distintos cinturones

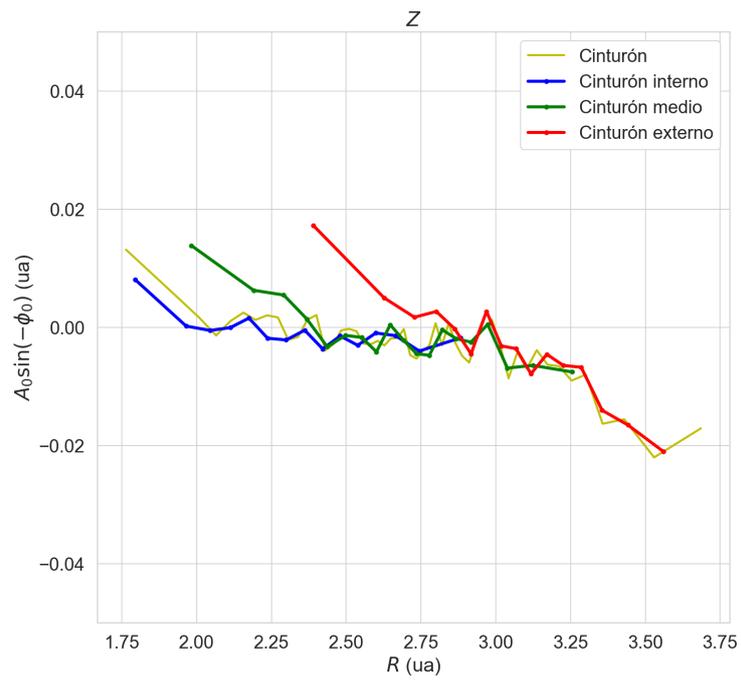


Figura 8: Modo $n = 0$ para Z

Resultado de los ajustes

En todos los gráficos de los parámetros obtenidos las curvas azules representan a los ajustes en el cinturón interno, las verdes al cinturón medio, las rojas el externo y las amarillas al cinturón completo. Como se observa en la Fig.9 las tres subdivisiones del cinturón claramente presentan un comportamiento distinto en A_1 , dividamos el análisis en cada uno de los cinturones.

- **Cinturón interno:** Presenta una amplitud del modo $n = 1$ menor al del resto de cinturones para todo radio. Se aprecia un leve crecimiento lineal desde $R \approx 2$ ua hasta $R \approx 2.8$ ua, lo cual puede indicar que están contenidos en un plano medio, aunque dada la caída y posterior crecimiento en la fase ϕ_1 (segundo panel, curva azul) obtenemos que no hay un único plano que contenga al cinturón interno, aunque se puede definir un plano medio con una inclinación respecto a la eclíptica de $I \approx 0.71^\circ$ y $\Omega = 83.3^\circ$, la inclinación se obtiene de ajustar una recta los A_1 y su pendiente A cumple la relación

$$\cos I = \frac{1}{\sqrt{1 + A^2}}$$

y para Ω tomamos la media circular de ϕ_1 para los mismos puntos que los utilizados para obtener A . La media circular de un conjunto de ángulos ϕ_{1i} es

$$\Omega = \arctan 2 \left(\frac{\sum_{i=1}^M \sin \phi_{1i}}{M}, \frac{\sum_{i=1}^M \cos \phi_{1i}}{M} \right)$$

. Finalmente el modo $n = 0$ es prácticamente constante como se puede observar en la Fig.8 y cercano a cero, lo cual indica que el plano centro con $Z \approx 0$ respecto a la eclíptica.

- **Cinturón medio:** Con estos asteroides ocurre que la amplitud del modo $n = 1$ se mantiene aproximadamente constante y su fase tiene una caída, se mantiene constante y luego vuelve a valores iniciales. Dado que A_1 no es proporcional a R , no tenemos que los asteroides de este cinturón se contengan en un plano inclinado respecto a la Eclíptica, por lo que podemos decir que está alabeado, además en la Fig.8 observamos como el modo $n = 0$ cae decae hasta $R \approx 2.5$ ua y luego se mantiene relativamente constante, indicando que la región interna del cinturón tiene una altura sistemáticamente distinta a la Eclíptica. Además del comportamiento de A_1 , vemos de la Fig.8 que el modo $n = 0$ tiene una caída sistemática con R , otro indicio de que el cinturón externo de asteroides está alabeado.
- **Cinturón externo:** Este cinturón presenta un comportamiento notablemente distinto al de los otros, comienza con una caída de A_1 hasta $R \approx 3$ ua y luego comienza un crecimiento, este comportamiento claramente no corresponde al de un plano inclinado respecto a la Eclíptica. Aunque la amplitud del modo $n = 1$ presenta un comportamiento distinto al de un plano, su fase se mantiene relativamente constante.
- **Cinturón:** El cinturón completo presenta un comportamiento promedio y con las tendencias correspondientes a los cinturones que dominan la muestra en cada R (el interno para los radios más pequeños y el externo para los radios mayores). Realizando el mismo análisis que con el cinturón interno obtenemos que su plano medio tiene una inclinación $I = 1.13^\circ$ y $\Omega = 96.97^\circ$ respecto a la Eclíptica, estas medidas no están en concordancia con las del trabajo de Saverio Cambioni y Renu Malhotra 2018 'The Mid-plane of the Main Asteroid Belt', la discrepancia puede deberse no solo al método utilizado sino también a la muestra trabajada.

Con la excepción del cinturón medio, tanto el interno como el externo presentan una geometría similar en cuanto a la dispersión en Z como se puede ver con la Fig.7, su parte interna es más dispersa, decae hasta

un mínimo y luego domina un crecimiento monótono de σ_{DI} . Con ayuda de la Fig.6 podemos inferir que el mínimo de σ_{DI} correspondería a un máximo en la densidad numérica de asteroides con poca dispersión en Z . Para el cinturón medio tenemos dos mínimos, quizás pueden relacionarse a los dos máximos de densidad en los otros dos cinturones.

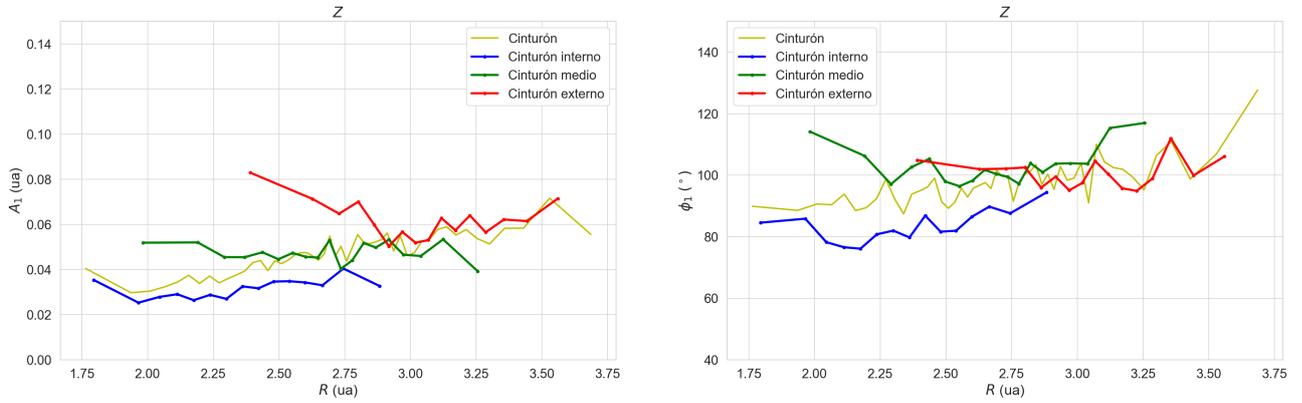


Figura 9: Modo $n = 1$ para Z

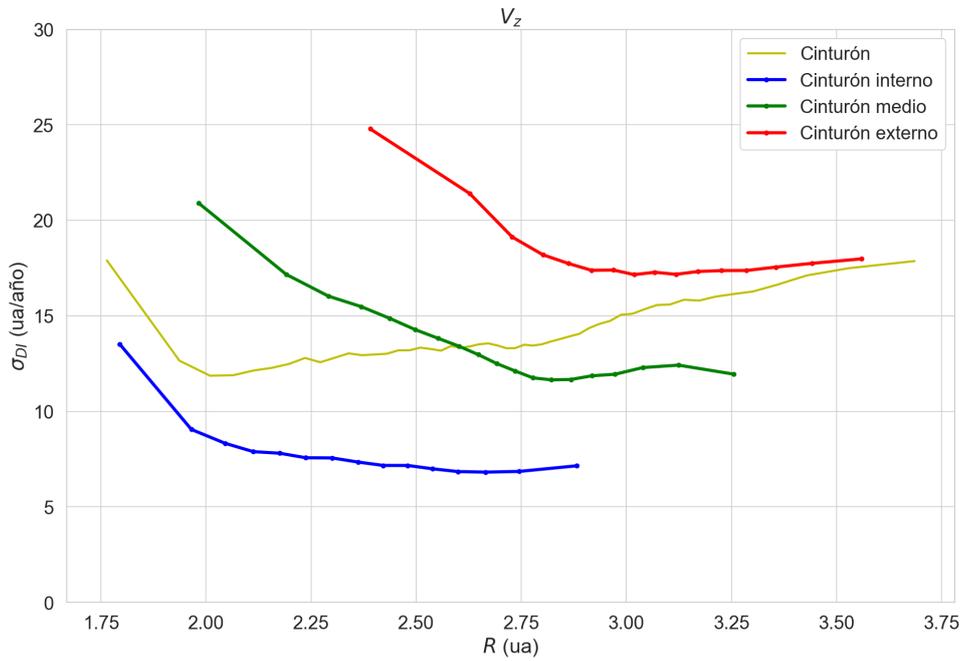


Figura 10: Dispersión de V_z

Al igual que con Z la velocidad vertical de los tres cinturones es diferente y su A_1 aumenta según vamos recorriendo los cinturones Interno, Medio y Externo como se observa en la Fig. 12. El análisis de cómo debe ser V_z para los distintos anillos para asteroides que están contenidos en un plano no es tan sencillo como en Z , debido a que se pueden esperar variaciones en A_1 y ϕ_1 debido a variaciones en las velocidades V_R y V_ϕ con el radio y también es esperable poder ver modos de mayor frecuencia debido a que están presentes en V_R y V_ϕ , observemos que para el movimiento en un plano tenemos

$$Z = AR \sin(\phi - \phi_1) + A_0$$

Con $\partial_R A = 0$, $\partial_R \phi_1 = 0$ y $\partial_R A_0 = 0$, entonces

$$\dot{Z} = (R\dot{\partial}_t A + A\dot{R}) \sin(\phi - \phi_1) + AR(\dot{\phi} - \dot{\partial}_t \phi_1) \cos(\phi - \phi_1) + \dot{\partial}_t A_0$$

$$\dot{Z} = \sqrt{(R\dot{\partial}_t A + A\dot{R})^2 + A^2 R^2 (\dot{\phi} - \dot{\partial}_t \phi_1)^2} \sin(\phi - \phi_1 - \gamma) + \dot{\partial}_t A_0$$

con

$$\gamma = \arctan 2(AR(\dot{\phi} - \dot{\partial}_t \phi_1), R\dot{\partial}_t A + A\dot{R})$$

Como \dot{R} y $\dot{\phi}$ pueden variar con R y aún así tratarse de un movimiento plano, tenemos que V_Z tiene amplitud y fase del modo $n = 1$ que es dependiente de como varían \dot{R} y $\dot{\phi}$ con R . Sin embargo podemos asegurar que no hay un movimiento correspondiente al de un plano si observamos que el modo $n = 0$ en V_z varía con R , ya que para un plano es esperado que

$$\partial_R A_0 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 A_0}{\partial R \partial t} = 0$$

Por lo cual una variación con R en la amplitud del modo $n = 0$ que describe V_z implica que los objetos sin importar el movimiento que tengan, no van a poder ser descritos con un único plano que evolucione en el tiempo. En rigor el análisis es más complicado, puesto que \dot{R} y $\dot{\phi}$ pueden depender de ϕ , lo cual genera que la amplitud que multiplica al sin en \dot{Z} no sea una amplitud de un modo de Fourier y puede propagarse un término constante que pueda depender del radio. Sin embargo, un análisis detallado y con toda la generalidad necesaria muestra que un movimiento plano debe cumplirse que

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial R \partial t} = 0$$

sin importar la forma funcional de $\dot{R}(R, \phi)$ y $\dot{\phi}(R, \phi)$, se deja en el apéndice la demostración (A).

Con esta última observación y con los resultados obtenidos para el modo $n = 0$ en V_z que se ven en la Fig. 11 podemos concluir que el cinturón externo de asteroides (curva roja) es el que presenta mayores evidencias de que su movimiento y disposición espacial media de no puede ser descrita con un único plano que evolucione en el tiempo.

Finalmente podemos concluir que hay indicios de alabeo en los tres cinturones pero con geometrías diferentes. El cinturón con indicios menos firmes es el interno, ya que su amplitud del modo $n = 1$ crece de forma lineal y el modo $n = 0$ de V_z si bien tiene una caída con R no es tan grande como para asegurar de forma inequívoca que está alabeado, el argumento del alabeo para el cinturón interno está en la tendencia de ϕ_1 que parece ser proporcional a R , lo cual no es consistente con un plano, sino que lo es con varios anillos que van rotando su línea de nodos.

Para el cinturón medio el indicio de alabeo está en que su A_1 es prácticamente constante y no nula, lo cual tampoco corresponde a un plano, además la fase ϕ_1 no tiene la tendencia de mantenerse constante en los extremos del cinturón, y notando que el modo $n = 0$ en la parte interna tiene una caída para luego

quedar casi constante y luego volver a caer en la parte externa, podemos aventurar la conclusión que para el cinturón medio sus extremos presentan un alabeo y su parte media también debido a que A_1 no varía con R .

El cinturón externo es el que presenta más evidencia de no poder ser descrito con un plano medio, ya que su A_1 no tiene la tendencia para ser modelado con una recta (de hecho se le ajusta mejor una parábola) y por las variaciones del modo $n = 0$ en V_Z también podemos concluir que su movimiento no puede ser contenido en un único plano que evoluciona en el tiempo.

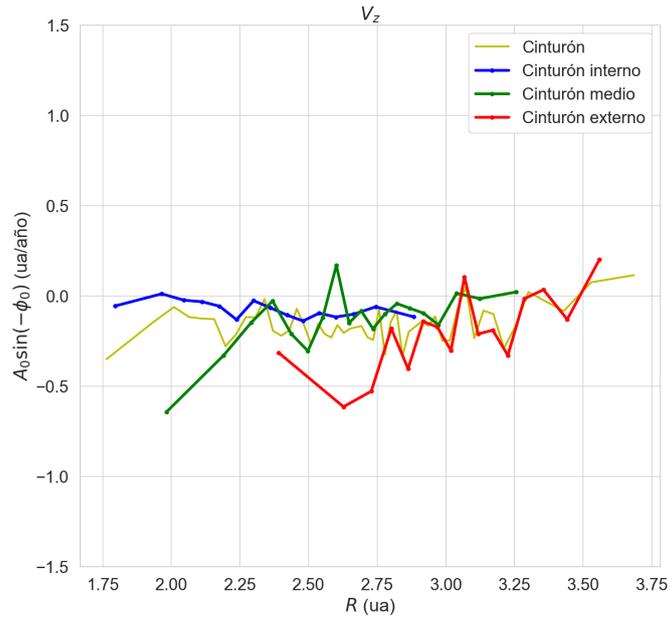


Figura 11: Modo $n = 0$ para V_Z

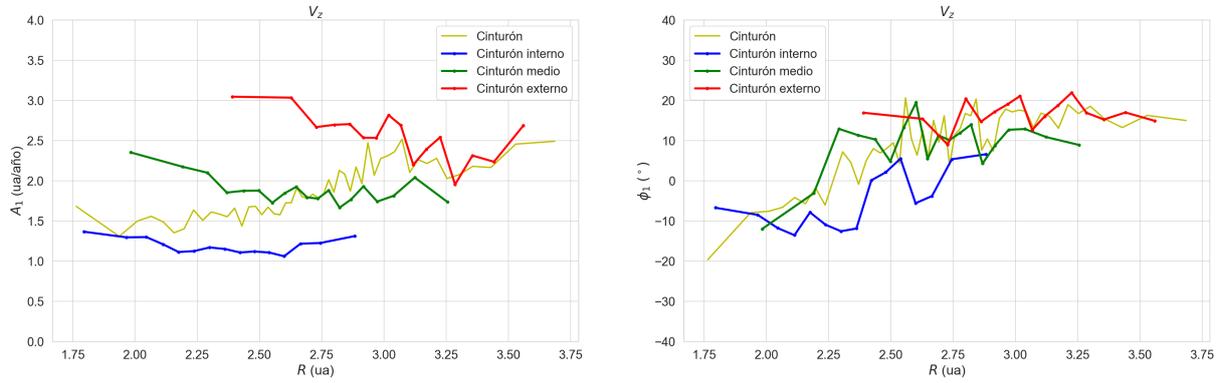


Figura 12: Modo $n = 1$ para V_z

Analicemos ahora V_ϕ , en la Fig.15 notamos que σ_{DI} para la velocidad V_ϕ del cinturón completo no se comporta como un promedio de las dispersiones de cada cinturón, esto se debe a que V_ϕ en los distintos cinturones tienen distintos promedios como se puede observar en la Fig.13. Las distintas resonancias que generan los gaps de Kirkwood generan también la diferenciación en distintas curvas de rotación como vemos en la Fig.13, cada "banda" del plano R, V_ϕ se corresponde a los grupos en el plano a, e de la Fig.4. Claramente la descomposición de Fourier del cinturón sin la diferenciación de interno, medio y externo es inútil, ya que los gaps de Kirkwood generan en un mismo anillo tres medias distintas de V_ϕ , por lo cual no se puede describir propiamente con una única curva.

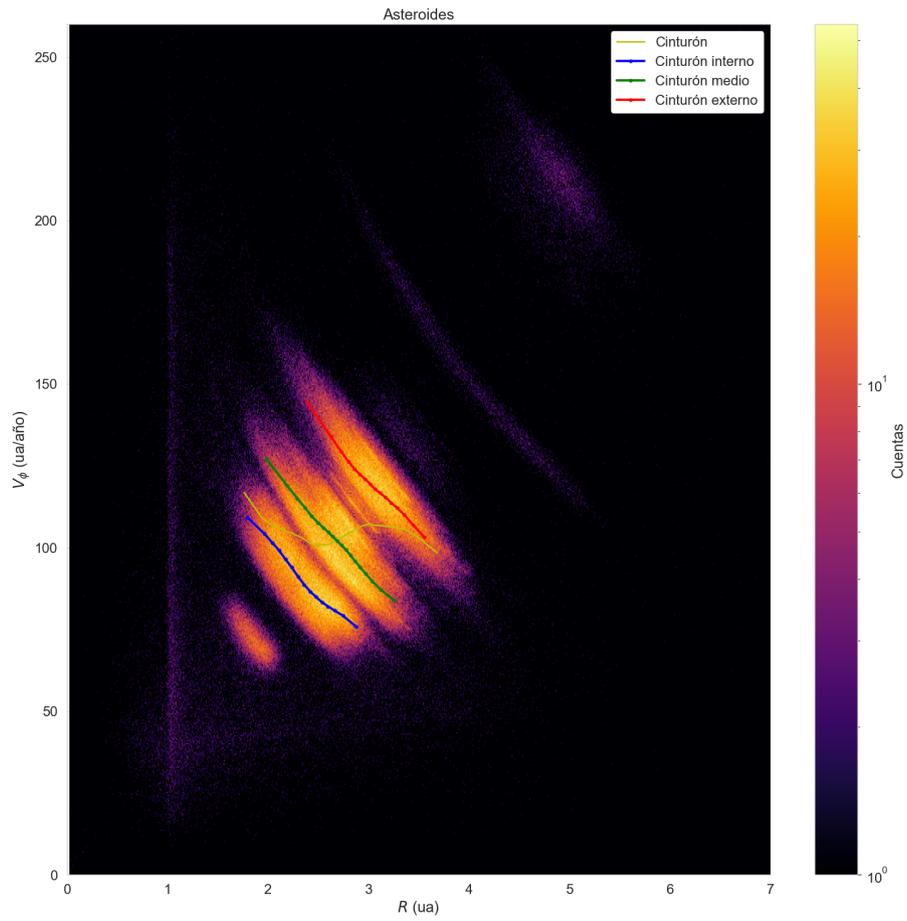


Figura 13: Modo $n = 0$ para V_ϕ

Notemos que en orbitas elípticas no debemos esperar que el modo $n = 0$ resuma toda la información, ya que ese modo da la media de la rotación en todo el anillo, el modo $n = 1$ da las asimetrías esperadas en una orbita elíptica, en la Fig.14 se muestran los resultados de $n = 1$, la tendencia variante de A_1 y en ϕ_1 en los tres cinturones puede ser reflejo de variaciones en las orbitas medias de cada cinturón.

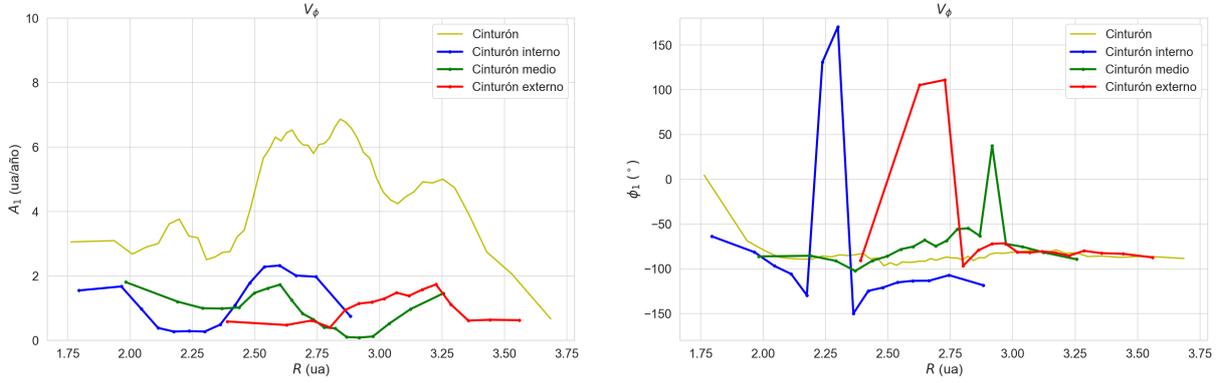


Figura 14: Modo $n = 1$ para V_ϕ

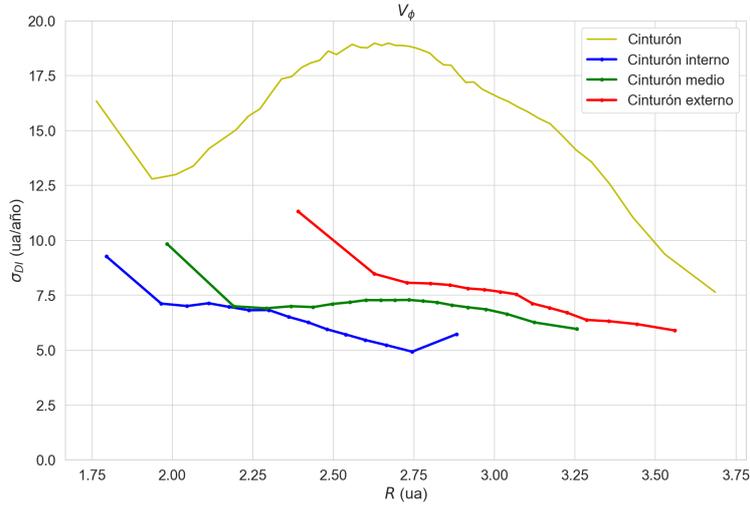


Figura 15: Dispersión de V_ϕ

Con V_R queda claro que debe dominar un modo $n = 1$ para dar cuenta los cambios en la velocidad radial debido a observar orbitas elípticas centrados desde uno de los focos (ya que si estuviéramos centrados en el centro de la elipse V_R sería descrito principalmente por un modo $n = 2$), de la Fig.17 podemos ver las tendencias de caída en A_1 son similares entre los distintos cinturones, y además notamos del segundo panel que ϕ_1 tiene distintas tendencias para cada cinturón y no presentan una media compartida, lo cual puede ser indicio de que las elipses promedio que estamos describiendo no presentan la misma orientación entre los distintos cinturones y además dentro de un mismo cinturón la orientación cambia suavemente con el radio, ya que ϕ_1 indica donde V_R se anula y además pasa de negativo a positivo, lo cual nos dice la orientación del perihelio de las orbitas medias. En la Fig.18 mostramos el promedio de V_R en distintas celdas del plano ϕ, R para ilustrar como en la dirección de Júpiter $\phi \approx 0$ la velocidad radial es nula aunque la línea de perihelios

no es exactamente una recta en $\phi = 0$ sino que se desvía hacia $\phi > 0$, lo cual se puede observar en el ϕ_1 para el cinturón completo (curva amarilla de la Fig.17).

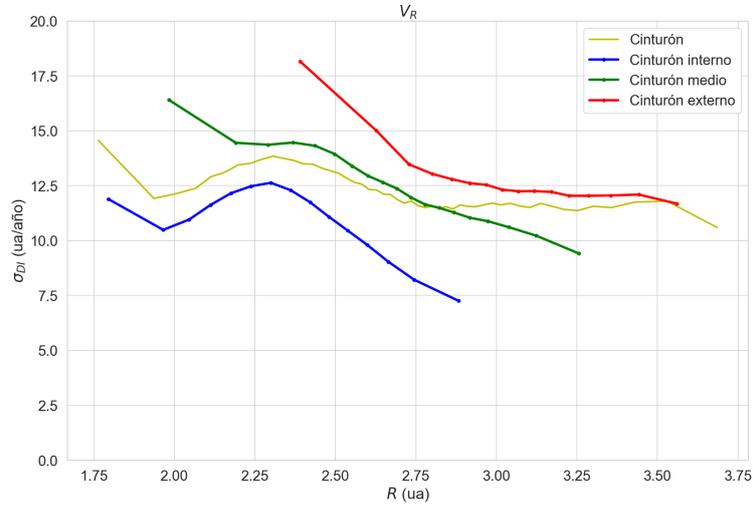


Figura 16: Dispersión σ_{DI} para V_R

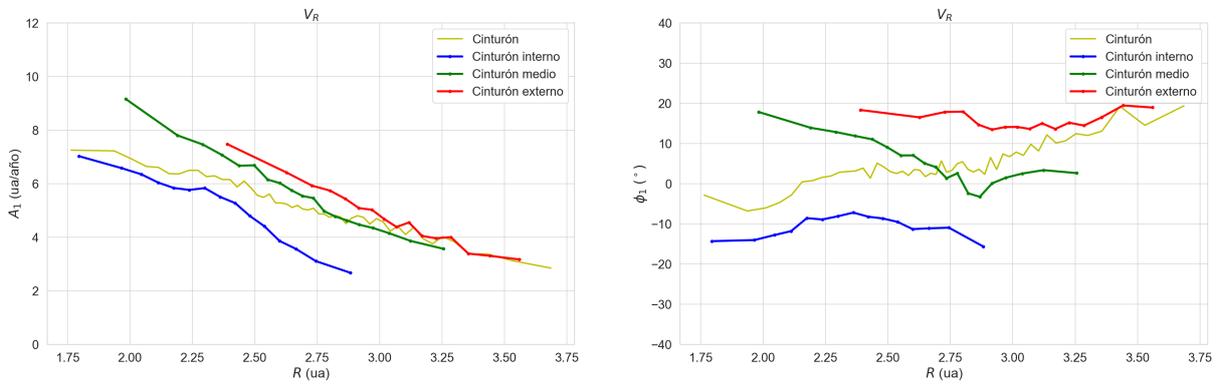


Figura 17: Modo $n = 1$ para V_R

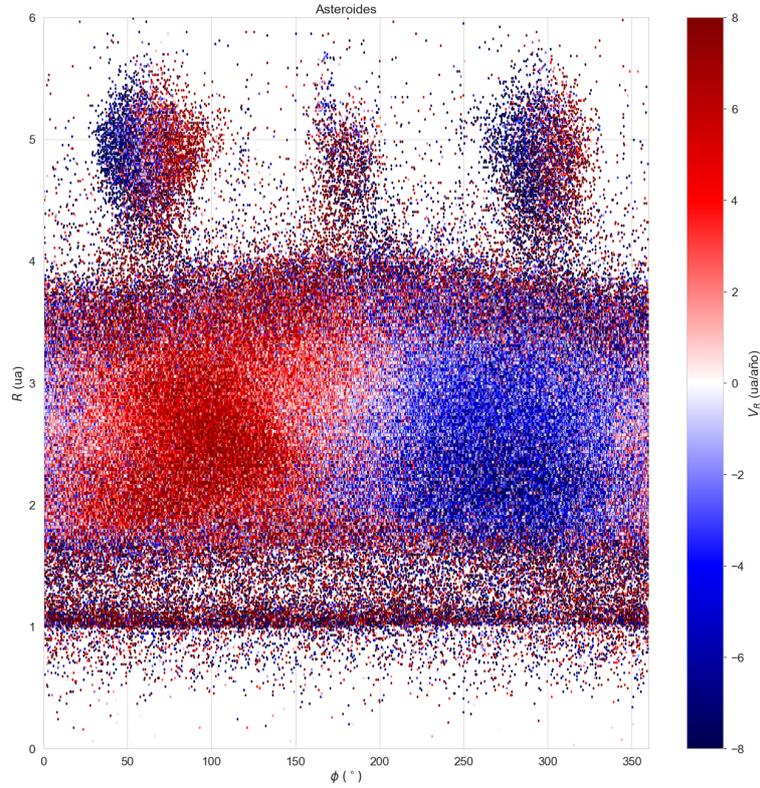


Figura 18: Promedios de V_R en distintas celdas del plano R, ϕ para los asteroides

Es curioso notar que el modo $n = 0$ de V_R no es nulo para los distintos cinturones, para casi todo R es positivo sin importar el cinturón, lo cual puede indicar una expansión de los cinturones. En principio no parece poder explicarse con la elección del sistema de coordenadas, ya que variaciones en el origen de coordenadas no generarían una media de V_R diferente de cero, sino que provocaría asimetrías en distintas direcciones de ϕ . En una órbita elíptica la media de \dot{R} es nula, por lo cual no deberíamos obtener un modo $n = 0$ para describir órbitas elípticas a menos que nuestra muestra de asteroides esté sesgada a asteroides que pasan del perihelio al afelio, lo cual en principio no tiene razón de ser. Por lo tanto no encuentro otra explicación que no sea una leve expansión de los anillos.

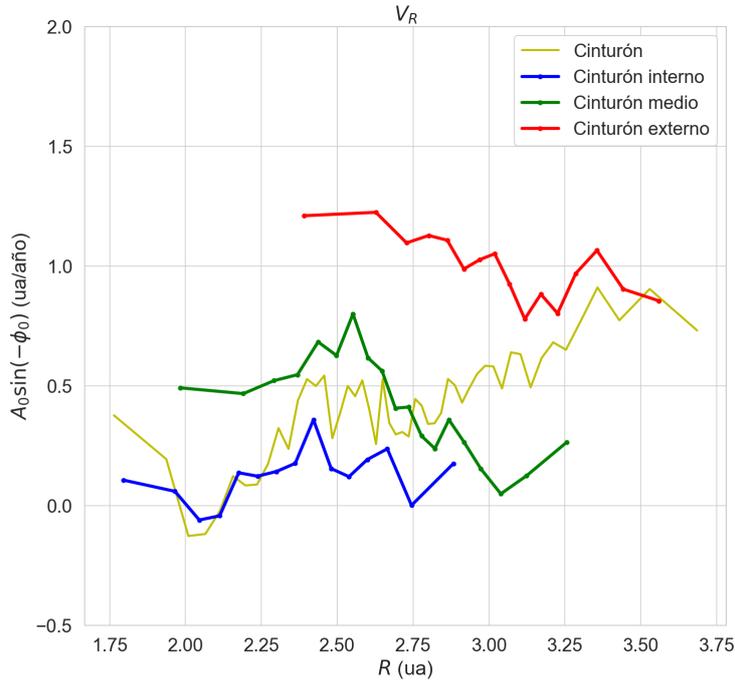


Figura 19: Modo $n = 0$ para V_R

0.3. Resumen y conclusiones

El análisis en coordenadas cilíndricas claramente no es el preferente para entender la dinámica de los asteroides, ya que toda la teoría queda más fácil descrita en términos de los elementos orbitales, sin embargo es interesante notar como los fenómenos de resonancia y perturbaciones que quedan evidentes en la teoría secular escrita en términos de elementos orbitales genera fenómenos interesantes vistos desde las coordenadas cilíndricas, tales como las distintas curvas de rotaciones para anillos superpuestos o los alabeos e inclinaciones distintas de cinturones superpuestos en el espacio.

En este trabajo quedaron expuestas algunas evidencias de que los tres cinturones principales en los que se puede dividir el cinturón de asteroides del Sistema Solar presentan alabeo y en consecuencia su posición media no puede ser descrita con un plano que evoluciona en el tiempo.

Apéndice A

Movimiento general en cilíndricas

Con mucha álgebra y trigonometría de por medio se puede demostrar que si la altura de un objeto está dada por

$$z(R, \phi, t) = \sum_{n=0}^N A_n(R, t) \sin(n\phi - \phi_n(R, t))$$

Y las velocidades \dot{R} y $\dot{\phi}$ son escritas como

$$\dot{R} = \sum_{m=0}^M B_m \sin(m\phi - \alpha_m)$$

$$\dot{\phi} = \sum_{s=0}^S C_s \sin(s\phi - \beta_s)$$

Entonces \dot{z} es

$$\begin{aligned} \dot{z} = & C_{00} + \bar{C}_{00} - \mathcal{T}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{i=0}^k \mathcal{C}_{i,k-i} + \sum_{i=k}^N \bar{\mathcal{C}}_{i,i-k} + \sum_{i=0}^{N-k} \bar{\mathcal{C}}_{i,k+i} - \mathcal{T}_k \right\} \cos(k\phi) \\ & + \left\{ \sum_{i=0}^k \mathcal{S}_{i,k-i} + \sum_{i=k}^N \bar{\mathcal{S}}_{i,i-k} - \sum_{i=0}^{N-k} \bar{\mathcal{S}}_{i,k+i} + \bar{\mathcal{T}}_k \right\} \sin(k\phi) + \sum_{k=N+1}^{2N} \left[\sum_{i=0}^k \mathcal{C}_{i,k-i} \right] \cos(k\phi) + \left[\sum_{i=0}^k \mathcal{S}_{i,k-i} \right] \sin(k\phi) \end{aligned}$$

Con

$$\mathcal{C}_{nm} = -\frac{B_m}{2} \frac{\partial A_n}{\partial R} \cos(\phi_n + \alpha_m) + \frac{B_m A_n}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial R} \sin(\phi_n + \alpha_m) - \frac{n C_m A_n}{2} \sin(\phi_n + \beta_m)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_{nm} = \frac{B_m}{2} \frac{\partial A_n}{\partial R} \cos(\phi_n - \alpha_m) - \frac{B_m A_n}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial R} \sin(\phi_n - \alpha_m) + \frac{n C_m A_n}{2} \sin(\phi_n - \beta_m)$$

$$\mathcal{S}_{nm} = -\frac{B_m}{2} \frac{\partial A_n}{\partial R} \sin(\phi_n + \alpha_m) - \frac{B_m A_n}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial R} \cos(\phi_n + \alpha_m) + \frac{n C_m A_n}{2} \cos(\phi_n + \beta_m)$$

$$\bar{\mathcal{S}}_{nm} = \frac{B_m}{2} \frac{\partial A_n}{\partial R} \sin(\phi_n - \alpha_m) + \frac{B_m A_n}{2} \frac{\partial \phi_n}{\partial R} \cos(\phi_n - \alpha_m) - \frac{n C_m A_n}{2} \cos(\phi_n - \beta_m)$$

$$\mathcal{T}_n = \frac{\partial A_n}{\partial t} \sin(\phi_n) + A_n \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \cos(\phi_n)$$

$$\bar{\mathcal{T}}_n = \frac{\partial A_n}{\partial t} \cos(\phi_n) - A_n \frac{\partial \phi_n}{\partial t} \sin(\phi_n)$$

Para un plano tenemos que $A_n = 0$ si $n > 1$, $\partial_R A_1 = A$, $\partial_R \phi_1 = 0$, $\partial_R A_0 = 0$ y $\partial_R \phi_0 = 0$. Entonces observemos que el termino que no depende de ϕ en \dot{z} es

$$\mathcal{C}_{00} + \bar{\mathcal{C}}_{00} - \mathcal{T}_0$$

Por lo cual este es el modo $n = 0$ de \dot{z} , para ver que en un plano este modo debe cumplir

$$\frac{\partial^2 A_0 \sin(-\phi_0)}{\partial R \partial t} = 0$$

notamos que \mathcal{C}_{00} y $\bar{\mathcal{C}}_{00}$ son nulas ya que $\partial_R A_0 = 0$ y $\partial_R \phi_0 = 0$ y el único termino no necesariamente nulo es \mathcal{T}_0 , pero este termino no puede depender del radio si se está describiendo un plano, por lo cual concluimos que en un plano el modo $n = 0$ de \dot{z} no puede depender del radio sin importar como se mueven los objetos que describen el plano.