



# Universidad de la República

## Facultad de Ciencias

TRABAJO FINAL DEL CURSO  
MECÁNICA CELESTE DE MAESTRÍA

Estudio dinámico del sistema extrasolar Kapteyn

Juan Andrés Pons Vuolo

**Profesor:**

Tabaré Gallardo

Montevideo, Uruguay - 14 de diciembre de 2020

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Sistemas extrasolares de 2 planetas</b>	<b>3</b>
2.1. Distribución de elementos orbitales . . . . .	3
2.2. Resonancias en sistemas de 2 planetas . . . . .	4
2.3. Modelo teórico para 2 planetas orbitando una estrella . . . . .	6
2.3.1. Caso coplanar . . . . .	6
2.3.2. Caso espacial . . . . .	6
<b>3. Sistema Kapteyn</b>	<b>7</b>
3.1. Curvas de nivel de $R$ . . . . .	7
3.1.1. Caso plano . . . . .	7
3.1.2. Caso inclinado . . . . .	7
3.2. Integraciones numéricas . . . . .	8
3.3. Atlas local de resonancias . . . . .	11
<b>4. Conclusiones</b>	<b>12</b>
<b>5. Apéndice</b>	<b>13</b>
5.1. Gráficos complementarios . . . . .	13
5.2. Integraciones numéricas variando $a$ y $e$ . . . . .	17

# 1. Introducción

Este trabajo comienza analizando 2 distribuciones de elementos orbitales que involucran a todos los exoplanetas descubiertos a la fecha (datos obtenidos de [openexoplanets.org](http://openexoplanets.org) a través de la plataforma DACE) [1].

Luego se estudia la distribución de cocientes de períodos restringiéndonos al caso de sistemas de 2 exoplanetas.

Por último, se selecciona un sistema que puede ser de interés y se estudia la dinámica del mismo. En este caso se eligió el sistema Kapteyn (cuyo nombre se debe al astrónomo holandés Jacobus Kapteyn) que posee los planetas Kapteyn\_b y Kapteyn\_c descubiertos en el año 2014.

## 2. Sistemas extrasolares de 2 planetas

### 2.1. Distribución de elementos orbitales

Antes de meterse de lleno en el caso de 2 planetas, se grafican excentricidad vs semi-eje (figura 1) y excentricidad vs masa (figura 2) de todos los sistemas extrasolares. Estos resultados son similares a los que se pueden obtener, por ejemplo, con las herramientas de ploteo online de Caltech [3] (ver figuras 12 y 21 del apéndice).

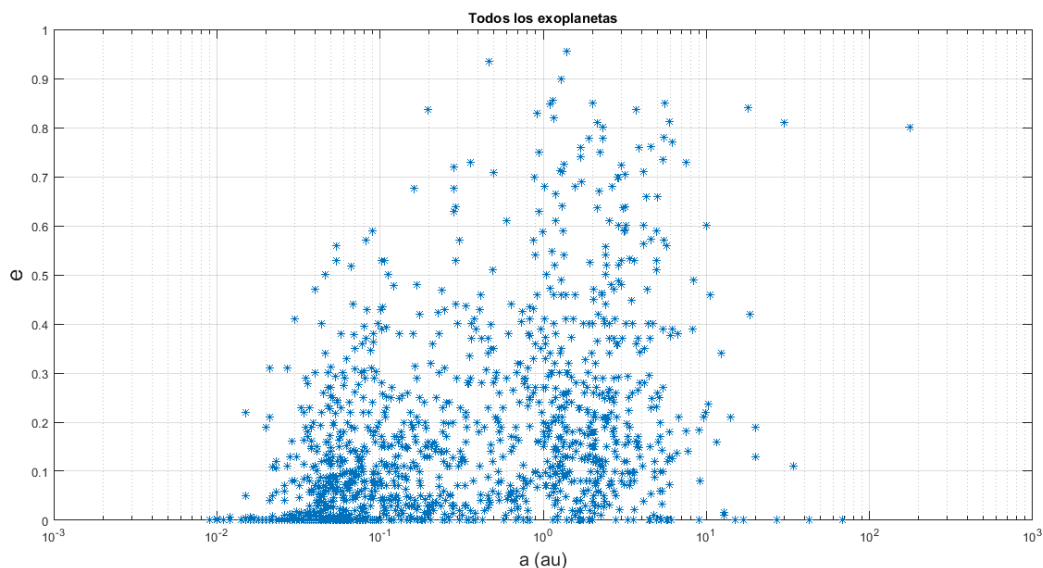


Figura 1: Excentricidades vs semi-eje de los 4383 exoplanetas descubiertos a la fecha en escala logarítmica

Si bien parecen haber zonas con mayor aglomeración y otras con algunos vacíos, se pueden observar una gran variedad de excentricidades para diferentes semi-ejes y masas, incluso algunas cercanas a 1. En el caso de la distribución  $e(a)$  se ve una tendencia a tener mayores excentricidades para semi-ejes mayores. La explicación de esto radica en que las mareas de la estrella sobre el planeta, que tienden a circularizar su órbita, son más fuertes si el planeta se encuentra más cercano a la estrella.

Por otro lado, al observar la distribución  $e(M)$  parece haber un comportamiento similar. En este caso la explicación es diferente, ya que las mareas son más fuertes a mayor masa, por lo

que se debería observar lo contrario. La distribución resultante es debido al sesgo observacional que provoca la detección más frecuente de planetas más masivos.

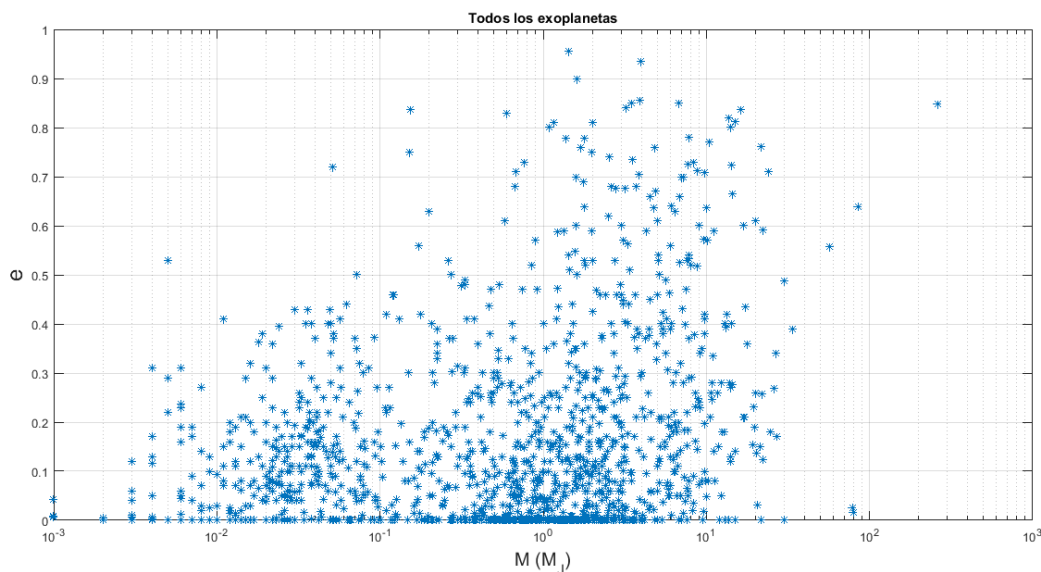


Figura 2: Excentricidades vs masas de los exoplanetas en masas de Júpiter y en escala logarítmica.

## 2.2. Resonancias en sistemas de 2 planetas

En general no se tiene información de todos los elementos orbitales de los exoplanetas debido a las limitaciones que ofrecen los métodos actuales de detección. Sin embargo, el período orbital es una cantidad que en general es determinada con bastante precisión y la cual permite obtener información acerca de las MMR (*mean motion resonances*). Sean  $P_1$  y  $P_2$  los períodos orbitales del planeta interno y del externo respectivamente para cada sistema. Al hacer un histograma según el cosciente  $P_2/P_1$  se obtiene que la mayoría de los casos caen entre 1 y 4, por lo que se restringe a ese rango los histogramas mostrados en este trabajo.

En la figura 3 se muestra un histograma de barras de ancho  $1/15$  superponiéndose al mismo las resonancias de menor orden, que se supone que son las más fuertes. Se observa que para las resonancias más cercanas a la 1:1 parecerían acumularse los coscientes mientras que para los de la 2:1 hacia la derecha, ocurre lo contrario, encontrándose acumulaciones a ambos lados de las resonancias. Esto se ractifica en el histograma de barras más finas de la figura 4.

Nombre:	Kapteyn	Kepler-110	Kepler-202	Kepler-29	Kepler-365	Kepler-50
Resonancia:	5 : 2	5 : 2	4 : 1	9 : 7	5 : 3	6 : 5
Error:	0 %	0,024 %	0,036 %	0,062 %	0,051	0,004 %

Tabla 1: Pares de exoplanetas más cercanos a MMRs.

En la tabla 2 se muestran los 6 sistemas de 2 exoplanetas que se acercaban más a una MMR. De estos 6 los que más completa tenían la información de sus parámetros en la base de datos eran el sistema Kapteyn y el Kepler-50, que justamente son los 2 con menor error con respecto a la resonancia más cercana. Finalmente se elige el sistema Kapteyn debido a que se encuentra en una resonancia de grado más bajo. Sin embargo, no deja de ser interesante

poder estudiar en el futuro el sistema Kepler-50 u otros. Incluso los que estén bien lejos de resonancias.

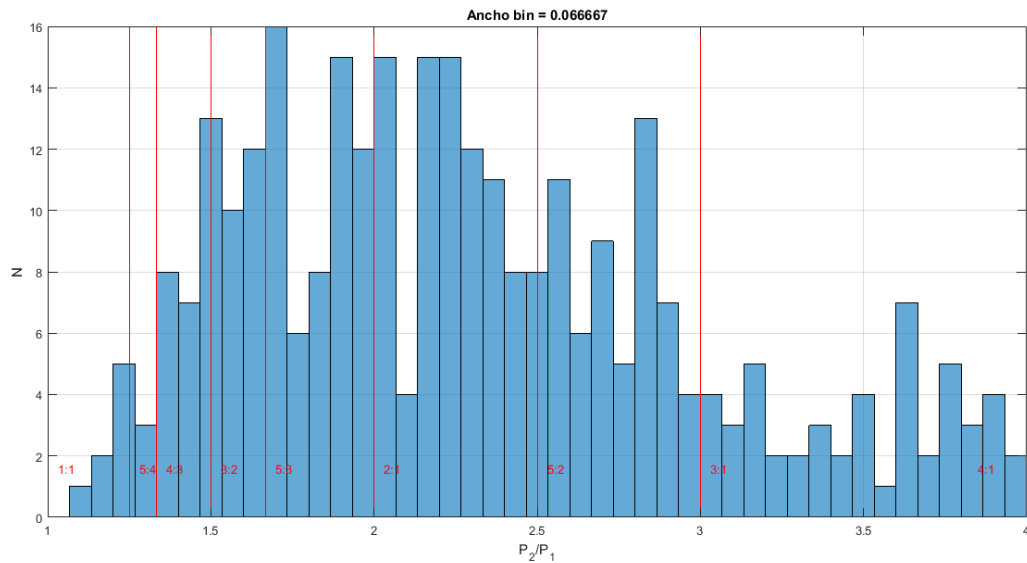


Figura 3: Histograma de cocientes  $P_2/P_1$  con la superposición de las resonancias de menor orden en este rango. El ancho de la barra utilizado es  $1/15 = 0.066667$ .

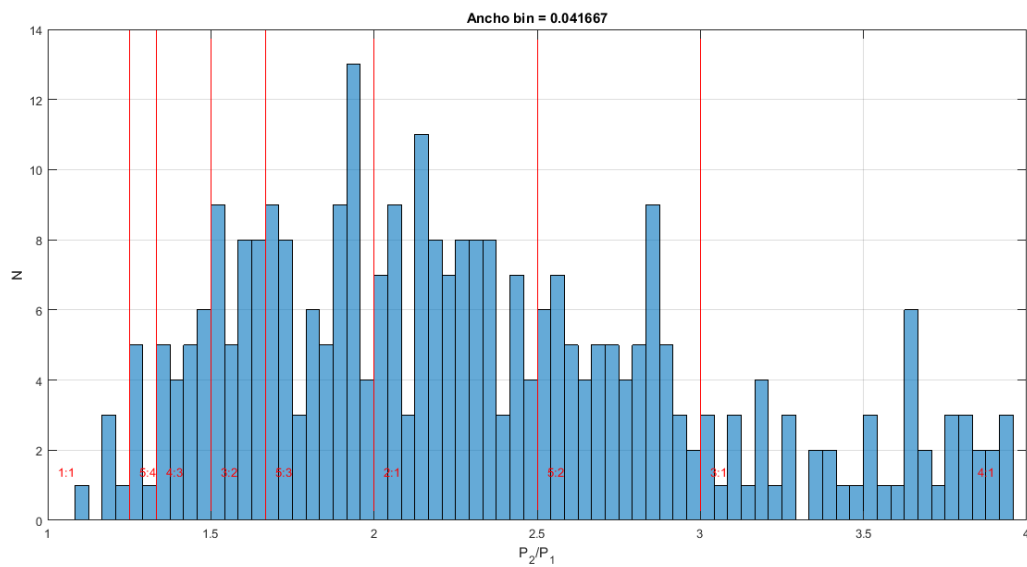


Figura 4: Mismo histograma que el de la figura 4 pero con una ancho de barra menor:  $1/24 = 0.041667$ .

## 2.3. Modelo teórico para 2 planetas orbitando una estrella

### 2.3.1. Caso coplanar

De acuerdo a Beaugé et. al. (2012) [2] el Hamiltoniano del modelo de octupolo para el caso plano es (habiendo eliminado los términos constantes):

$$H = \frac{Gm_1m_2}{a_2} \left( \frac{2 + 3e_1^2}{8(1 - e_2^2)^{3/2}} \alpha^2 - \frac{15(4 + 3e_1^2)}{64(1 - e_2^2)^{5/2}} \alpha^3 e_1 e_2 \cos(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) \right) \quad (1)$$

donde  $\alpha = a_1/a_2$ .

De la teoría secular se tiene que los semi-ejes son constantes en promedio a largo plazo. Por lo que tendríamos que  $H = H(e_1, e_2, \Delta\bar{\omega})$ . Sin embargo, al transformar al conjunto de variables  $\{(G_1 - G_2)/2, (G_1 + G_2)/2, \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2\}$ , donde  $G_1$  y  $G_2$  son las de Delaunay, se observa que no aparece dependencia según  $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ , por lo tanto,  $(G_1 + G_2)/2 = cte$ . Esto implica que:

$$L_1 \sqrt{1 - e_1^2} + L_2 \sqrt{1 - e_2^2} = cte \quad (2)$$

donde  $L_{1,2}$  son otro par de variables de las de Delaunay y dependen solo de los semi-ejes.

Cabe recordar que este modelo es válido para  $\alpha \ll 1$ , ya que proviene de un desarrollo de Legendre en dicho parámetro.

### 2.3.2. Caso espacial

Para el caso tridimensional el modelo analítico se vuelve más complicado por lo que con- vendría recurrir a un método numérico para calcular el Hamiltoniano.

### 3. Sistema Kapteyn

En esta sección se pretende estudiar el sistema extrasolar Kapteyn con el objetivo de determinar si su evolución es secular o resonante.

Los datos de dicho sistema se muestran a continuación:

Planeta	Masa ( $M_J$ )	P (d)	a (ua)	e	i ( $^\circ$ )	$\omega$ ( $^\circ$ )	$\Omega$ ( $^\circ$ )
Kapteyn_b	0,015099	46,616	0,168	0,21	—	80,4	—
Kapteyn_c	0,02202	121,54	0,311	0,23	—	—	—

Tabla 2: Datos del sistema Kapteyn obtenidos de DACE.

La estrella a la que orbitan estos 2 planetas es una estrella tipo M de  $0,281M_\odot$  situada a 12,8 años luz.

#### 3.1. Curvas de nivel de $R$

##### 3.1.1. Caso plano

A partir del hamiltoniano de la ecuación 1 se obtuvieron las curvas de nivel mostradas en la figura 5.

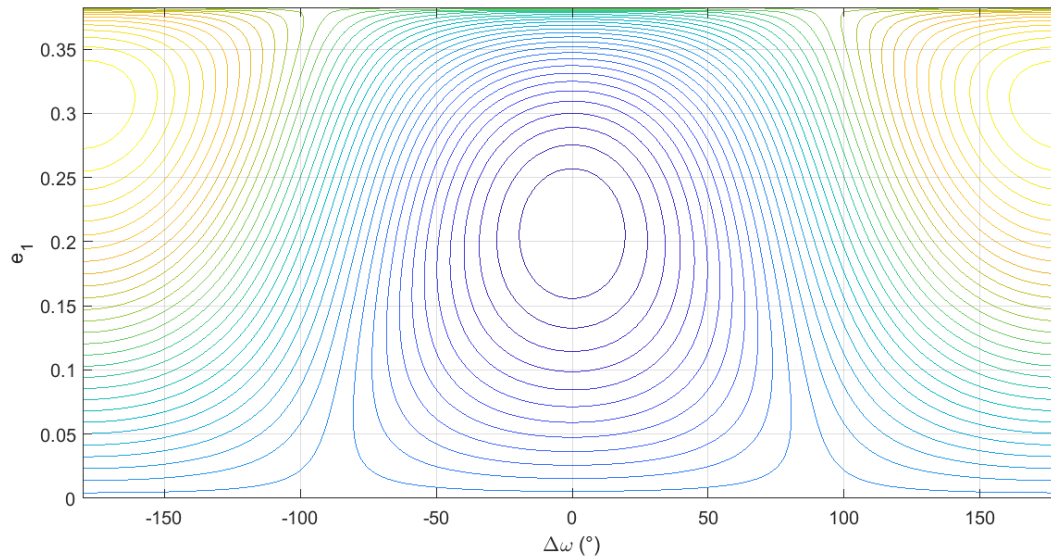


Figura 5: Curvas de nivel para el caso plano, habiendo obtenido H analíticamente.

##### 3.1.2. Caso inclinado

Para este caso no se realizaron curvas de nivel. Se trató de hacer numéricamente pero no se confió en el resultado ya que al probar el caso plano, el resultado fue totalmente diferente al de la figura 5.

### 3.2. Integraciones numéricas

Utilizando el EVORB 15 se realizaron varias integraciones numéricas de este sistema:

- Se integró en primera instancia el caso coplanar por 1 Myr.
- Se integró el sistema con una inclinación mutua de  $5^\circ$  también por 1 Myr.
- Se realizaron las mismas 2 integraciones de los puntos anteriores pero por 15 Myr.
- Se integró el 1<sup>er</sup> caso pero considerando los efectos relativistas.

En la figura 6 se grafican ambas excentricidades para el caso coplanar. Se puede ver como al aumentar una disminuye la otra, tal como lo predice la ecuación 2. En el caso inclinado se obtuvo una evolución muy similar.

En la figura 7 se comparan  $\Delta\bar{\omega}$  para ambos casos. En el caso coplanar se observa una oscilación (modo de oscilación mutua) mientras que en el inclinado se observa por momentos circulación y por momentos cortos oscilación.

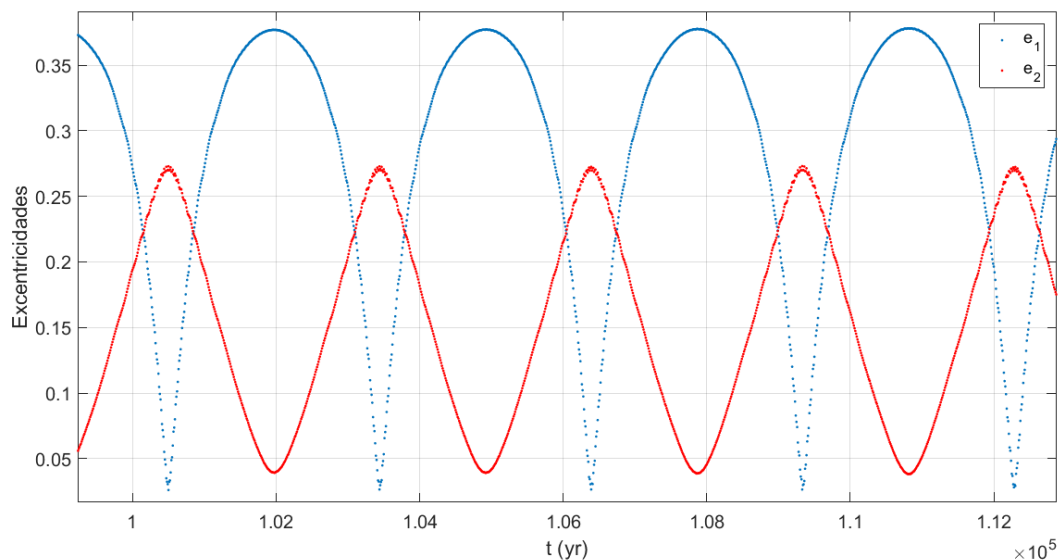


Figura 6: Excentricidades de ambos planetas en el caso coplanar. En azul Kapteyn\_b y en rojo Kapteyn\_c.

Al graficar  $e_1$  y  $e_2$  según  $\Delta\bar{\omega}$  (ver figura 8) se observa a primera vista que tanto las excentricidades como la diferencia entre los argumentos de los perihelios están acotados para el caso plano. Se obtiene una curva similar a las obtenidas en la figura 5. La localización del punto de equilibrio central parece coincidir bastante bien y estaría en  $(\Delta\bar{\omega}; e_1) \approx (0; 0,2)$ . Sin embargo, si se observa detenidamente, el sistema parecería estar en el límite de pasar de estar sobre una de las curvas cerradas a una abierta. Incluso si se observa la figura 8 para  $e_1 = 0,35$  se tiene  $\Delta\bar{\omega} \approx \pm 70$ , punto que si trasladamos a la figura 5, caería en una curva abierta. Esta inconsistencia probablemente se deba a que no es tan buena la aproximación de  $\alpha \ll 1$  (que en nuestro caso es 0.54) y por lo tanto, hayan otros términos de la expansión que tienen relevancia, y por lo tanto modificaría las curvas de nivel.

En el caso inclinado la situación es distinta para  $\Delta\bar{\omega}$ , ya que puede tomar todos los valores.



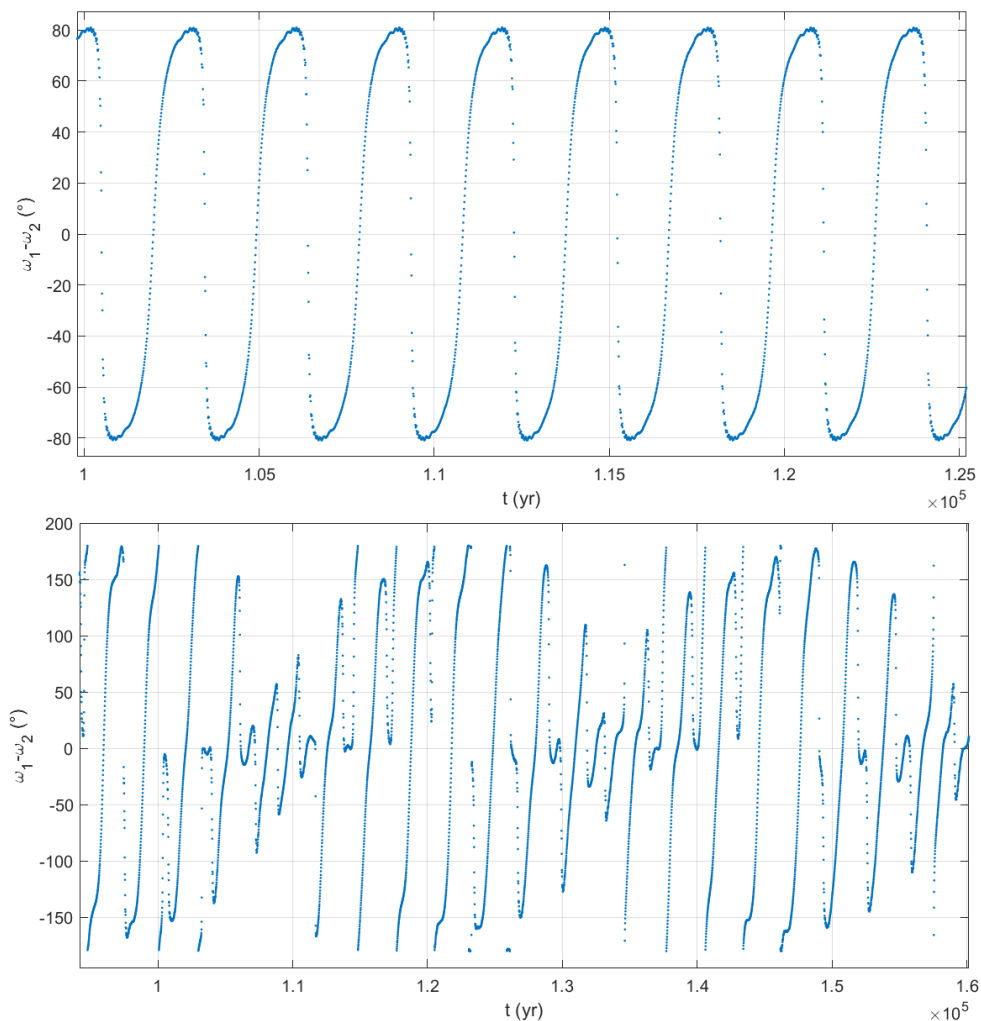


Figura 7: Arriba:  $\Delta\bar{\omega}(t)$  para el caso coplanar. Abajo:  $\Delta\bar{\omega}(t)$  para el caso inclinado.

Finalmente, en la figura 9 se muestra la evolución temporal de ambas inclinaciones, obteniéndose algo similar a lo que sucedía con las excentricidades, donde oscilaban a contrafase.

También se probó solapar  $i(t)$  con  $e(t)$  para ver si existía algo similar a un mecanismo Lidov-Kozai, pero se encontró que dichas cantidades oscilan con frecuencias diferentes, descartándose la importancia de dicho mecanismo en este sistema.

Por completitud, se muestran en el apéndice  $a_{1,2}(t)$  y  $\bar{\omega}_{1,2}(t)$  para el caso plano. En ambos casos, al integrar por 15 Myr (que en este caso son aproximadamente 450 millones de revoluciones del planeta más lento Kapteyn\_c) se observó que en promedio los semi-ejes permanecen constantes. Además, no se encontró ningún cambio en ningún elemento orbital al comparar las integraciones de 1 Myr con las de 15 Myr.

Tampoco se encontraron diferencias al agregar los efectos relativistas.

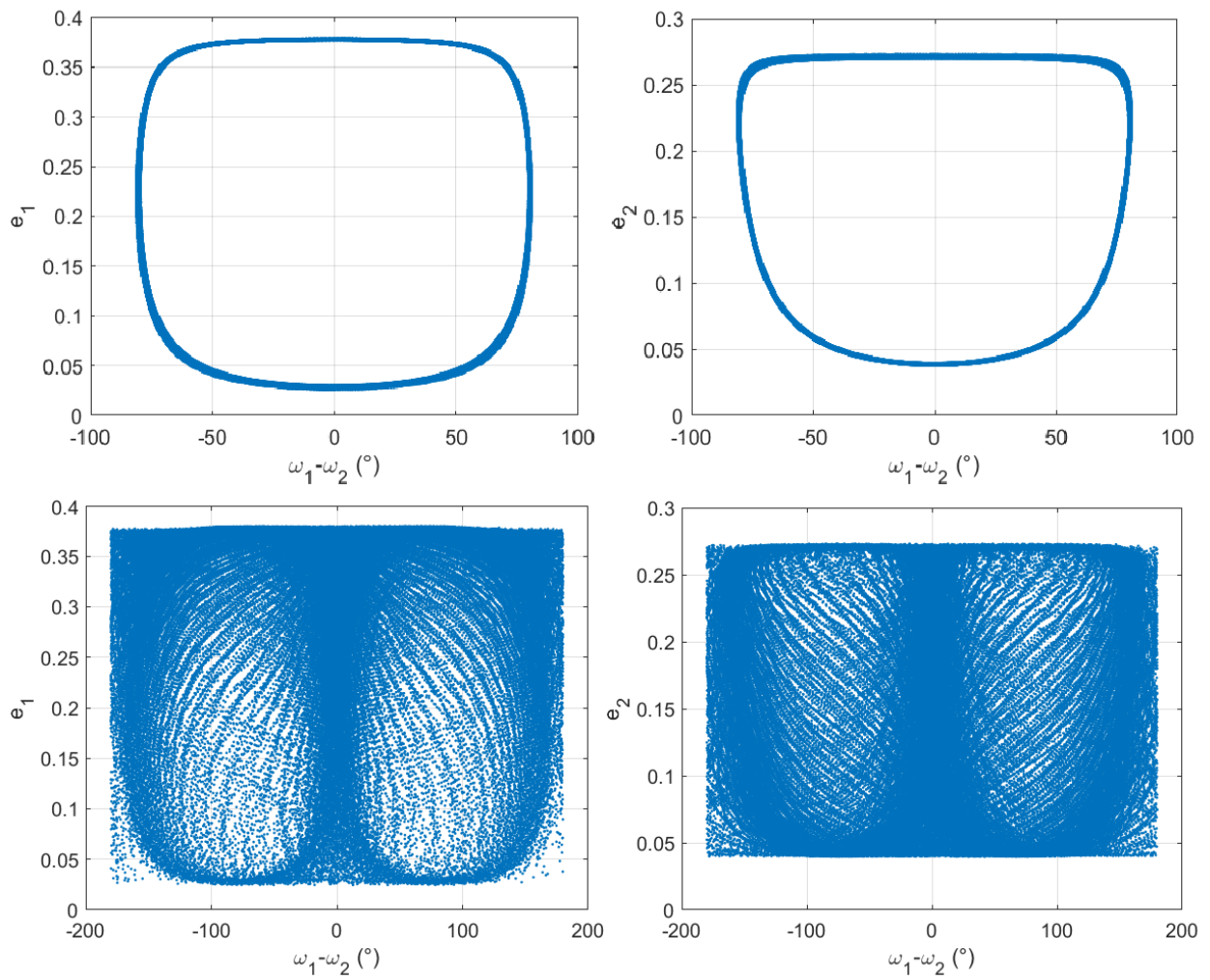


Figura 8: Arriba:  $e_{1,2}(\Delta\bar{\omega})$  para el caso coplanar. Abajo:  $e_{1,2}(\Delta\bar{\omega})$  para el caso inclinado.

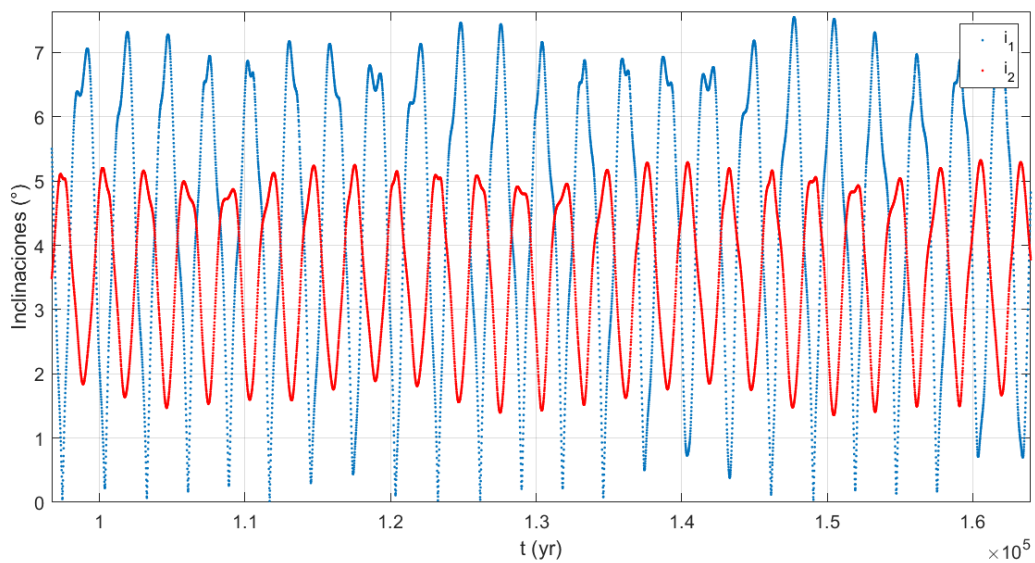


Figura 9: Inclinationes de ambos planetas. En azul Kapteyn\_b y en rojo Kapteyn\_c.

### 3.3. Atlas local de resonancias

Todo parecería indicar que este sistema se encuentra dominado por la evolución resonante de la MMR 5:2. Para saber que tan aislado está de otras resonancias que pudieran causar caos (si estuvieran muy cerca) se realizaron un par de atlas en la región donde están ubicados los planetas actualmente.

En el de la figura 10 se puede ver como el planeta Kapteyn\_b se encuentra bien en el medio de la resonancia interna 5:2 mientras que en la figura 11 se puede ver como el planeta Kapteyn\_c está bien en el medio de la resonancia externa 2:5.

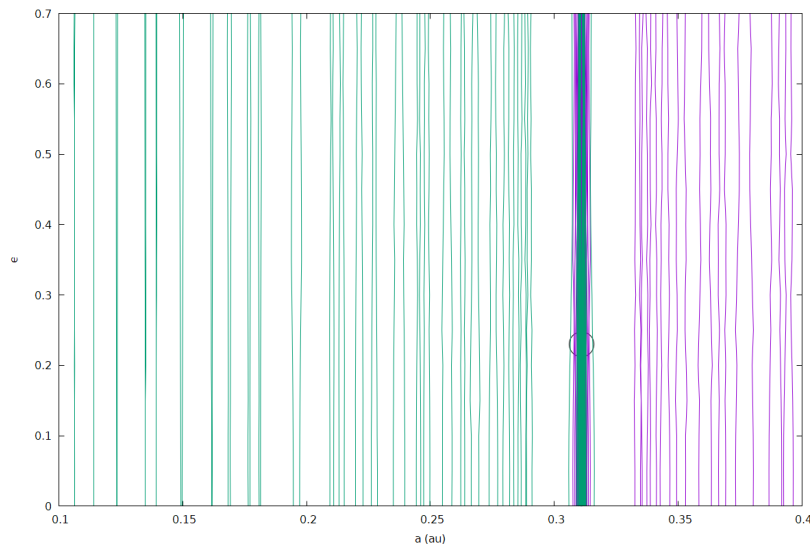


Figura 10: Atlas de MMR entre 0.1 y 0.4 au. El círculo indica la posición de Kapteyn\_b.

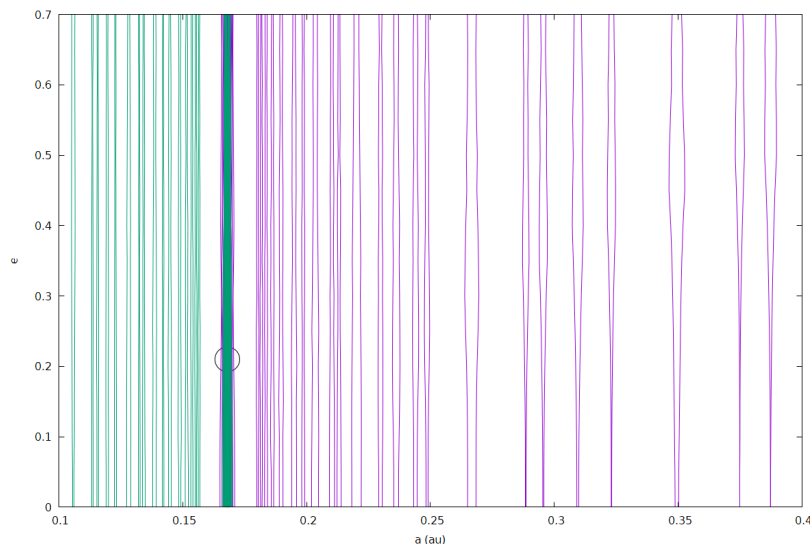


Figura 11: Atlas de MMR entre 0.1 y 0.4 au. El círculo indica la posición de Kapteyn\_c.

Parece ser claro que estas son las resonancias que dominan en esa región frente al resto, ya que se encuentran bien aisladas de las resonancias vecinas, y con un ancho considerablemente mayor ( $\sim 0.4$  para la 5:2 y  $\sim 0.2$  para la 2:5).

## 4. Conclusiones

En la primera parte del trabajo se estudió, sin profundizar demasiado, las distribuciones de algunos de los elementos orbitales de todos los exoplanetas descubiertos y en particular de los sistemas de 2 exoplanetas. Se obtuvieron resultados similares a los que se pueden obtener con herramientas de ploteo online disponibles en las bases de datos. Se observaron también que las MMR parecen tener cierto efecto en la distribución de  $P_2/P_1$  en los sistemas de 2 exoplanetas.

En la segunda parte del trabajo se estudio la dinámica del sistema extrasolar Kapteyn que posee los planetas Kapteyn\_b y Kapteyn\_c. Se integraron numéricamente, en principio, 2 casos, uno con inclinación mutua nula y otro con  $5^\circ$ , ya que no se contaba con este dato. En el primer caso se obtiene un comportamiento bastante coherente si comparamos las curvas de nivel teóricas con  $e_{1,2}(\Delta\bar{\omega})$  de la integración. Parece ser que el movimiento está dominado por la resonancia 5:2 (como se preveía) lo cual es confirmado al realizar los atlas mostrados en las figuras 10 y 11, donde se ve claramente que los planetas se encuentran ubicados prácticamente en el centro de las resonancias con mayor ancho y más aisladas de esa zona. Si se observa las figuras 14 y 15 se puede ver que las amplitudes de libración (0.0004 y 0.001) son mucho menores a los anchos de las resonancias 2:5 y 5:2 (0.2 y 0.4). En el segundo caso,  $e_{1,2}(\Delta\bar{\omega})$  cambia totalmente, pero aún así la resonancia parece seguir dominando, ya que los atlas dan similar (ver figuras 18 y 19).

Finalmente, por completitud, se probó variar los valores iniciales de  $a_1$ ,  $a_2$  y  $e_1$ . En los primeros 2 casos la motivación fue ver que pasaba en los bordes (según los atlas) de las resonancias mientras que en el 3<sup>er</sup> caso se quería ver que tan cierto era lo que predecían las curvas de nivel del Hamiltoniano analítico, donde al aumentar por ejemplo  $e_1$ ,  $\Delta\bar{\omega}$  debía comenzar a circularizar. Esto último fue, en efecto, comprobado. En los primeros 2 casos, al colocar los planetas en los bordes de las resonancias, se obtuvieron semi-ejes con evolución en régimen de *sticking*.

## Referencias

- [1] Base de datos de *Data and Analysis Center for Exoplanets*.  
<https://dace.unige.ch/>
- [2] Cristian Beaugé, Sylvio Ferraz-Mello & Tatiana A. Michtchenko, 2012. *Multi-planet extrasolar systems – detection and dynamics*. Res. Astron. Astrophys. N°12, pp 1044.
- [3] Herramientas de ploteo del *NASA Exoplanet Archive*.  
<https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>
- [4] Tabaré Gallardo, 2020. *Resumen conceptual del curso Mecánica Celeste. - Perturbaciones seculares y resonantes*. Facultad de Ciencias, UdelaR.

## 5. Apéndice

### 5.1. Gráficos complementarios

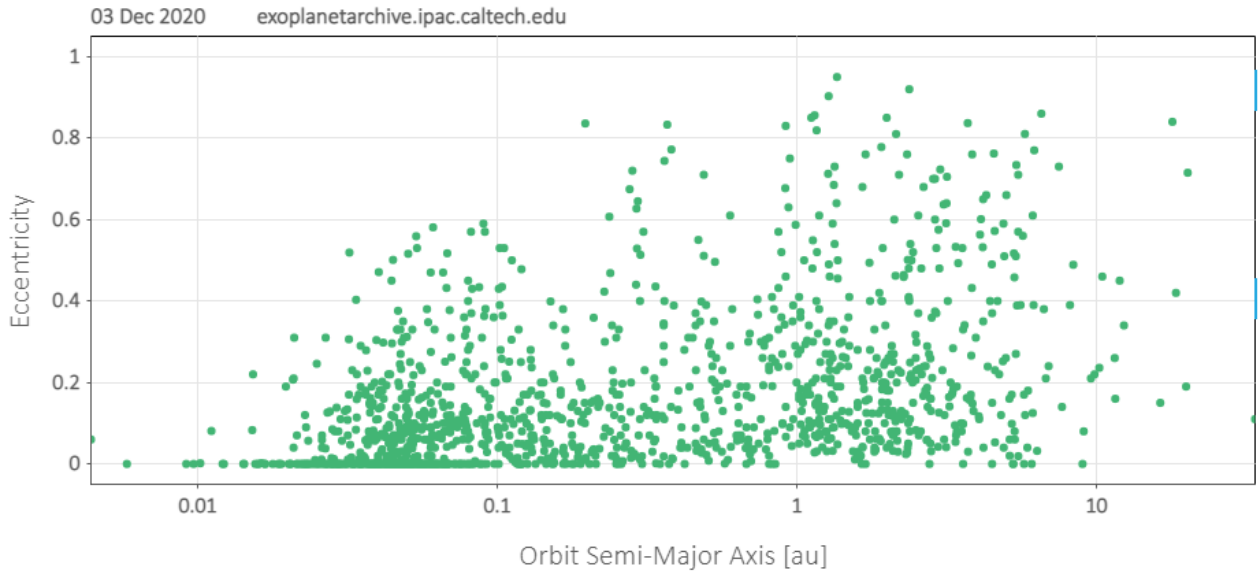


Figura 12: Excentricidades vs semi-eje obtenido de Caltech.

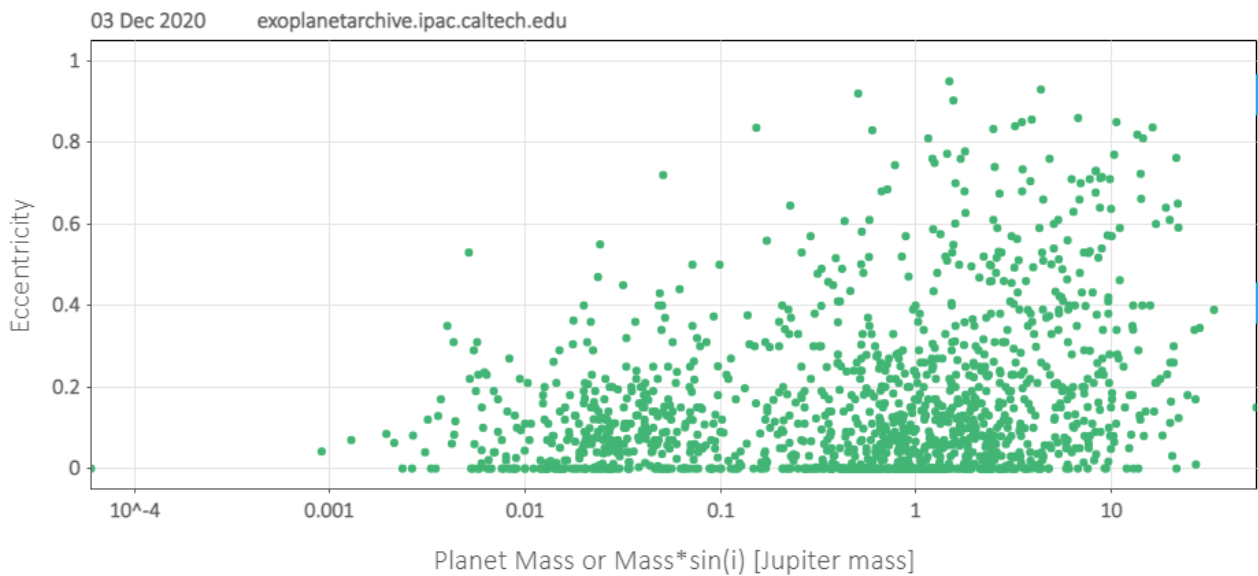


Figura 13: Excentricidades vs masas de los exoplanetas obtenido en Caltech.

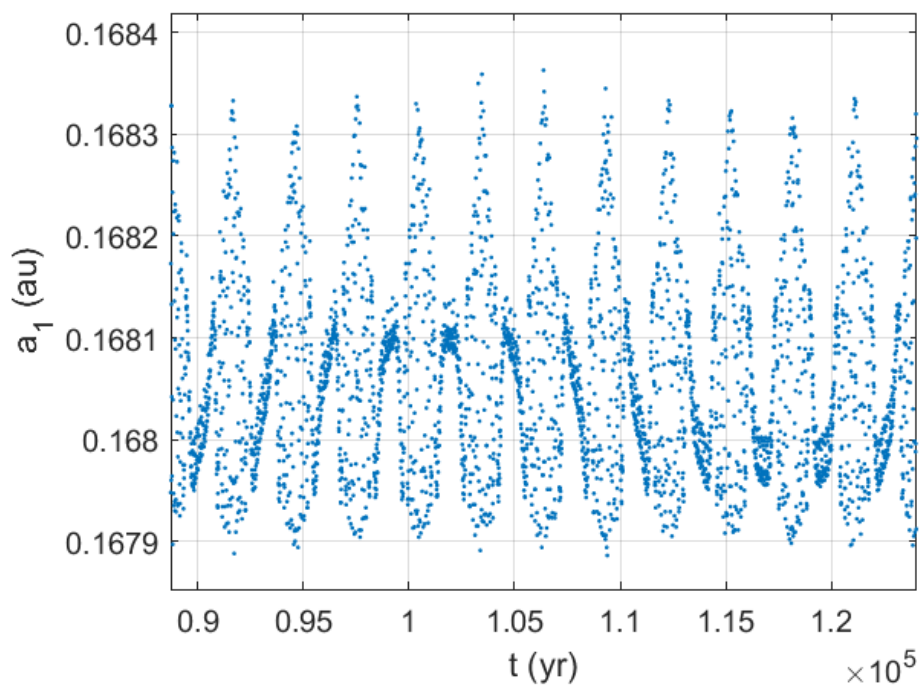


Figura 14: Semi-eje del planeta interno, caso coplanar.

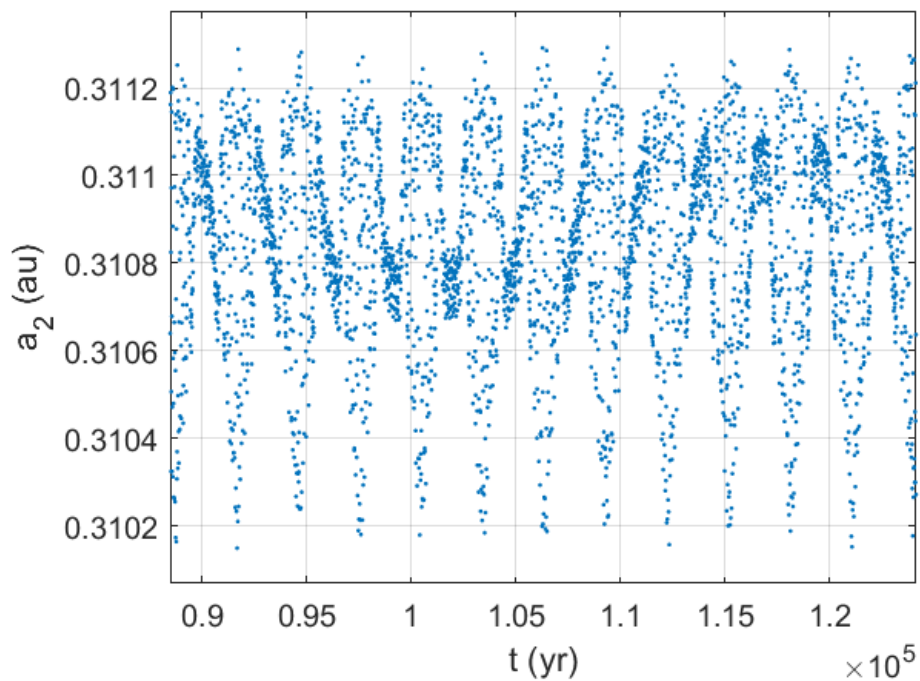


Figura 15: Semi-eje del planeta externo, caso coplanar.

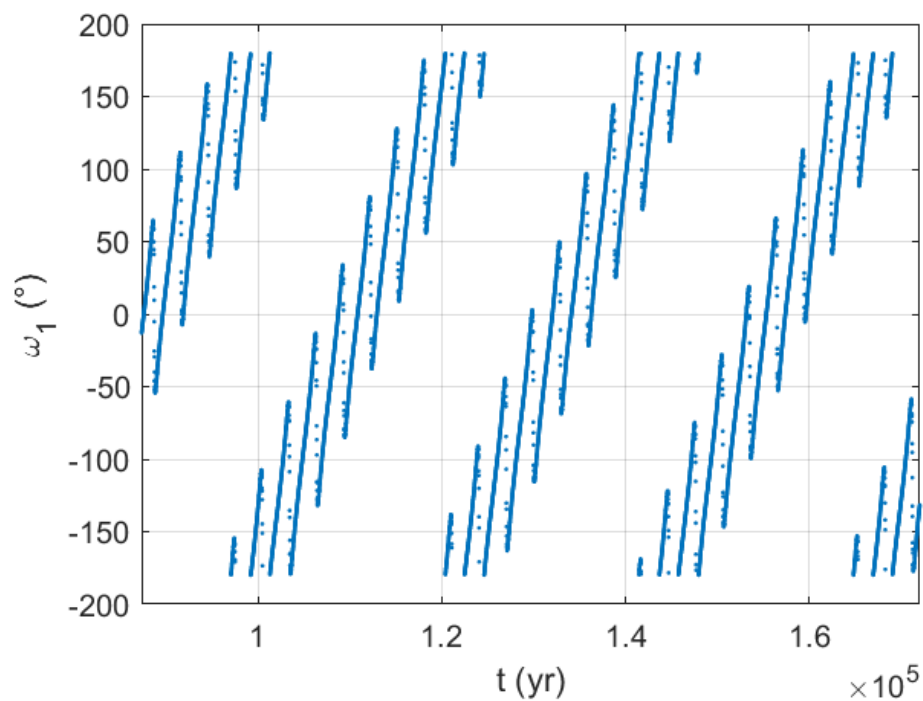


Figura 16: Argumento del perihelio del planeta interno, caso coplanar.

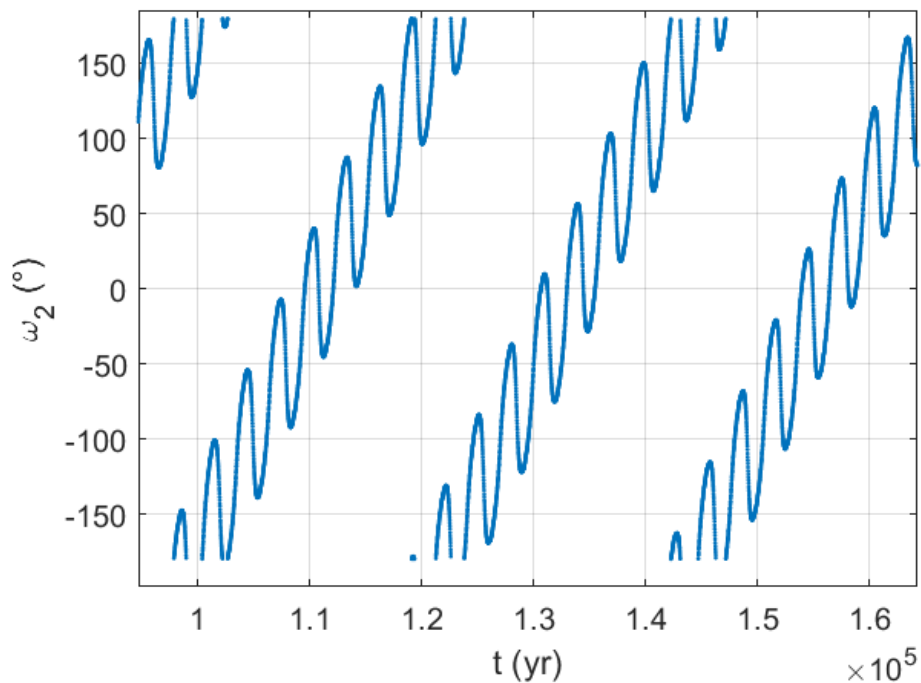


Figura 17: Argumento del perihelio del planeta externo, caso coplanar.

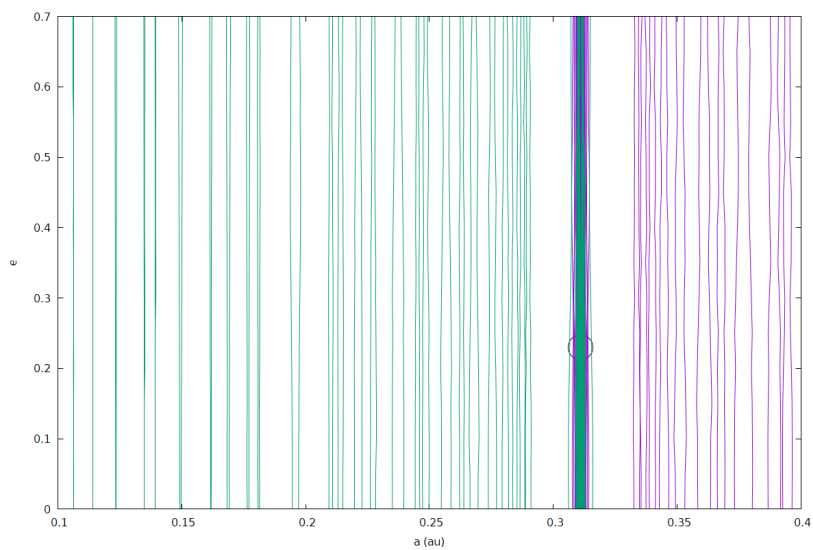


Figura 18: Atlas de MMR entre 0.1 y 0.4 au para el caso de inclinación mutua de  $5^\circ$ . El círculo indica la posición de Kapteyn\_b.

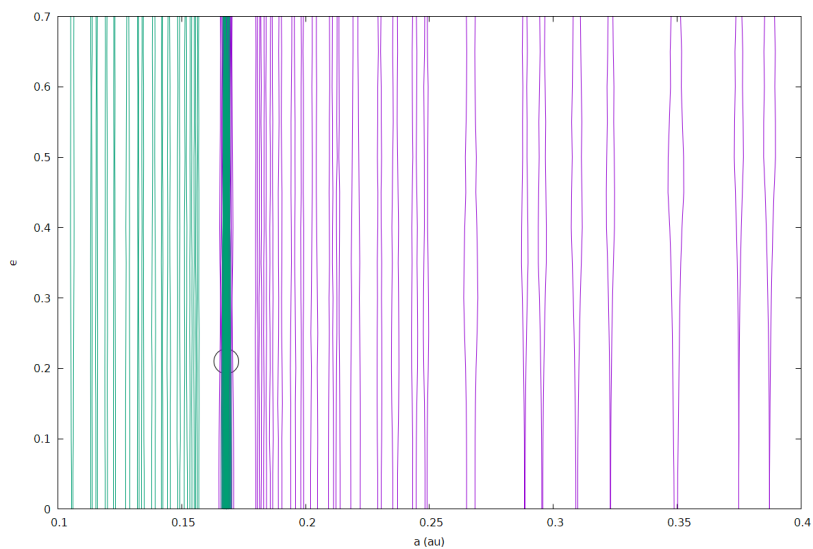


Figura 19: Atlas de MMR entre 0.1 y 0.4 au para el caso de inclinación mutua de  $5^\circ$ . El círculo indica la posición de Kapteyn\_c.



## 5.2. Integraciones numéricas variando $a$ y $e$

A modo de complemento se realizaron 3 experimentos. A continuación se explica brevemente de que se trataron.

A partir de los atlas, es posible visualizar los límites (o “separatrices”) de las resonancias. Por lo tanto, en las primeras 2 pruebas, se probó integrar numéricamente el sistema, colocando a los planetas en los bordes de cada resonancia (1 por vez, sino se correrían las resonancias).

Los resultados se muestran a continuación:

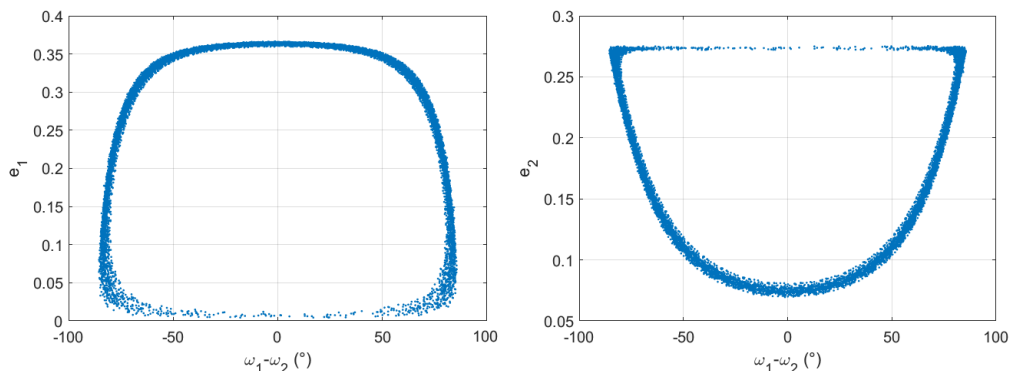


Figura 20: Excentricidad Vs  $\Delta\bar{\omega}$  para el caso  $a_1 = 0,179$ .

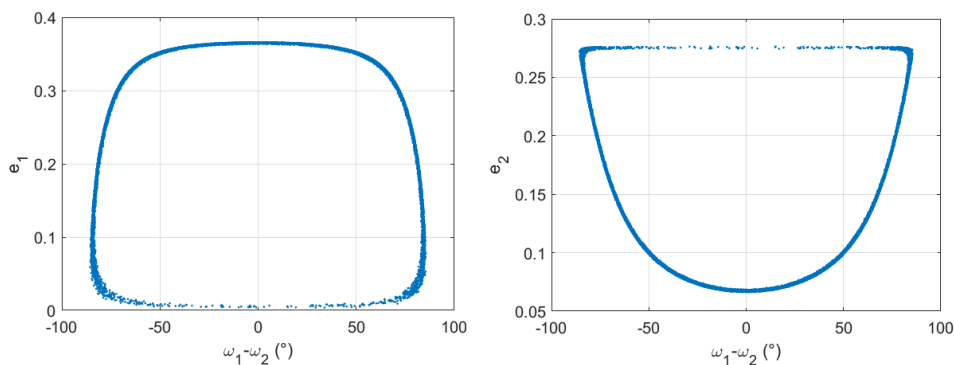


Figura 21: Excentricidad Vs  $\Delta\bar{\omega}$  para el caso  $a_2 = 0,280$ .

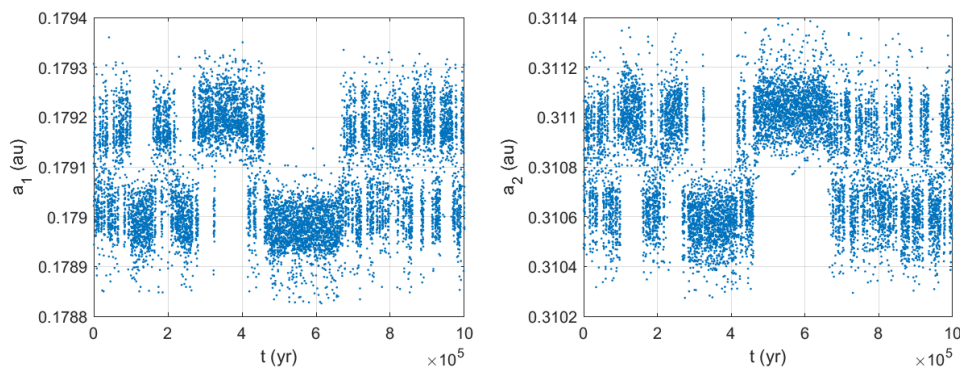


Figura 22: Semi-ejes en función del tiempo en el caso  $a_1 = 0,179$ .

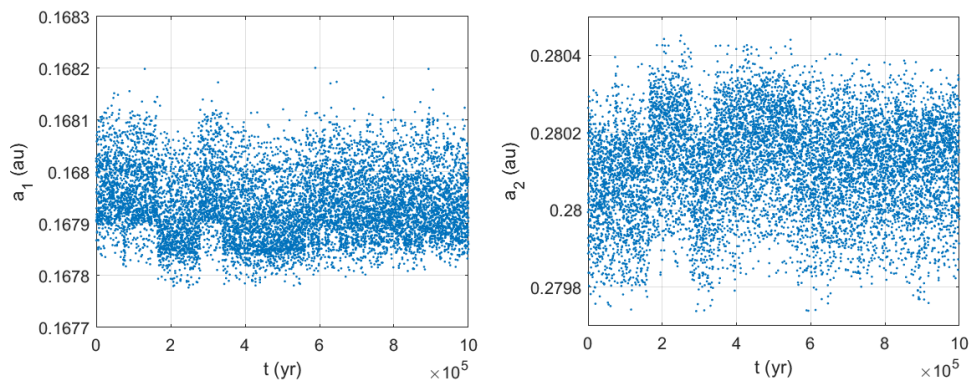


Figura 23: Semi-ejes en función del tiempo en el caso  $a_2 = 0,280$ .

En estos 2 experimentos se mantuvieron modos oscilatorios para  $\Delta\bar{\omega}(t)$  y apareció un comportamiento de *sticking* para los semi-ejes de ambos planetas, más acentuado en el caso donde se movió a *Kapteyn\_b* al borde de la resonancia.

Luego se realizó un 3<sup>er</sup> experimento corriendo la excentricidad  $e_1$  inicial un tanto hacia arriba (de 0.21 a 0.3), manteniendo los semi-ejes originales.  $e_2$  resultó ser 0.1663, valor obtenido de la ecuación 2. El resultado fue un cambio de modo de  $\Delta\bar{\omega}$  de ser oscilatorio a circulatorio, como puede apreciarse en la figura 24. Esto es coherente al observar las curvas de nivel de la figura 5.

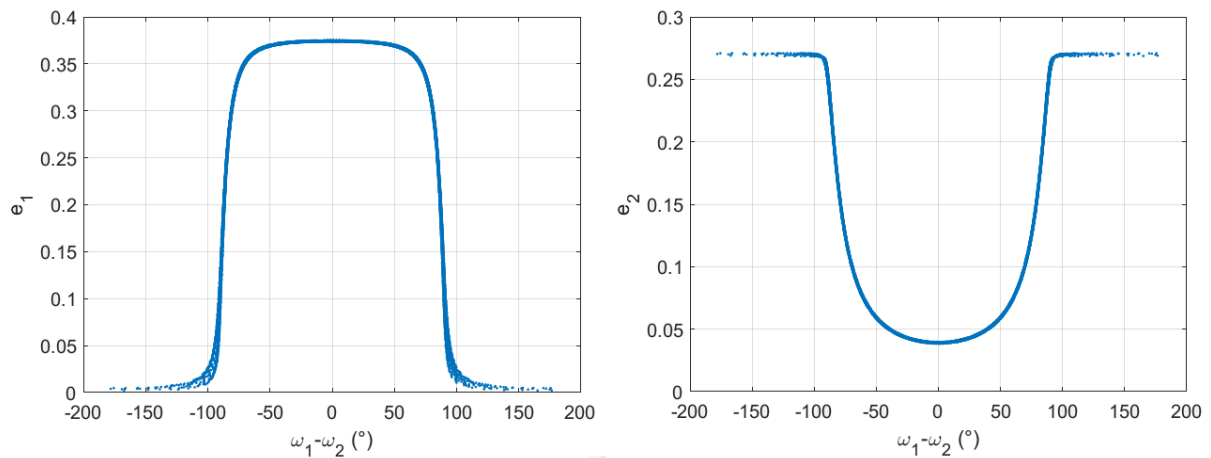


Figura 24: Excentricidad Vs  $\Delta\bar{\omega}$  para el caso  $e_1 = 0,3$ .