Estudio de Sungrazers con la teoría secular semianalítica

Jorge Ibáñez
Mecánica Celeste
Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Uruguay

20 agosto 2022

Resumen

Nuestro objetivo es utilizar la teoría secular semianalítica para describir el comportamiento y estudiar el desempeño de la misma para casos que son inaccesibles para la teoría secular analítica. Una población con altas inclinaciones y excentricidades es ideal, por lo que trabajaremos con sungrazers. Aún así, la teoría secular semianalítica tiene sus limitaciones por lo cual tomaremos un caso de ejemplo para estudiar dicho límite de la teoría. Además, utilizaremos la teoría para analizar las derivadas de los elementos orbitales y estudiar la importancia de cada planeta para nuestro grupo de sungrazers.

1. Introducción

Los resultados analíticos nos permiten, en general, una buena comprensión de la evolución orbital, pero bajo ciertas hipótesis, las cuales suelen ser bajas excentricidades e inclinaciones o que el cociente entre el semieje del perturbador y del perturbado no sea próximo a la unidad. En la integración numérica obtenemos un resultado exacto, pero no sabemos por qué el sistema evoluciona de dicha manera. La teoría secular semianalítica nos permite entender cómo se comporta el sistema, podemos analizar cómo cada elemento dinámico del sistema afecta la evolución del objeto. Para este trabajo utilizaremos la teoría secular semianalítica para analizar orbitas de sungrazers, con distancias de perihelio $q < 2$ UA y altas inclinaciones, comparando el desempeño de dicha teoría con una integración numérica exacta.

2. Teoría secular semianalítica

Primero veamos cómo funciona el código que utilizaremos y en que consiste la teoría. Para estudiar el comportamiento de una órbita necesitamos obtener la derivada de los elementos orbitales y para esta la derivada de la función perturbadora respecto a los elementos. Para calcular la misma utilizamos el código **Rsecderiv**, este calcula la función perturbadora secular de un conjunto de planetas sobre un asteroide en órbita arbitraria, así como la de los planetas. Hacemos un promedio en todas las posiciones del cometa y del planeta partiendo de la integral doble

$$< R >_t = R_{sec} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{1}$$

En donde tomamos una grilla de valores (λ, λ_p), evaluamos R instantáneamente, sumamos y dividimos entre el número de evaluaciones. Además, sabemos por interacción de dos cuerpos que la parte indirecta se anula.

$$R_{sec} = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R dM dM_p \tag{2}$$

$$R_{sec} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} R_i \frac{2\pi}{N}\frac{2\pi}{N} = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} R_i \tag{3}$$

Nuestra $R_{sec}(a, e, i, \omega, \Omega)$ representa el valor medio de R y es equivalente a suponer que el perturbador y el perturbado no son objetos puntuales sino elipses de material más denso en el afelio y menos en el perihelio. Como el sistema es secular tenemos que el sistema evoluciona en una superficie $R_{sec} = cte$. Las ecuaciones seculares para el conjunto a,e,i,Ω, ϖ son:

$$\frac{da}{dt} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R_{sec}}{\partial \omega} \tag{5}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R_{sec}}{\partial i} \tag{6}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial R_{sec}}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R_{sec}}{\partial i} \tag{7}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R_{sec}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R_{sec}}{d\Omega} \tag{8}$$

En donde necesito las derivadas de R_{sec}. Para obtenerlas sin una expresión analítica lo que hacemos es variar cada uno de sus elementos orbitales calculando las derivadas parciales como

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{R(e+\Delta e) - R(e)}{\Delta e} \tag{9}$$

Una vez calculadas sustituimos en las ecuaciones de Lagrange y obtenemos las derivadas de los elementos. Para obtener la evolución orbital calculamos

$$\Delta e = \frac{de}{dt}\Delta t \tag{10}$$

Para cierto paso temporal Δt. Luego simplemente se actualiza el nuevo elemento orbital en cada paso. Esta es la idea de la teoría secular semianalítica, tomamos una parte analítica suponiendo evolución secular y otra la calculamos numéricamente.

3. Derivadas de los elementos orbitales

Veamos cómo afecta cada planeta a las derivadas de los elementos orbitales en función del semieje para el conjunto de sungrazers que tomamos. Para cada elemento veremos primero un planeta particular y luego el conjunto. Empezamos con dM/dt para Saturno. Utilizaremos los mismos colores para cada planeta con todos los elementos en adelante.

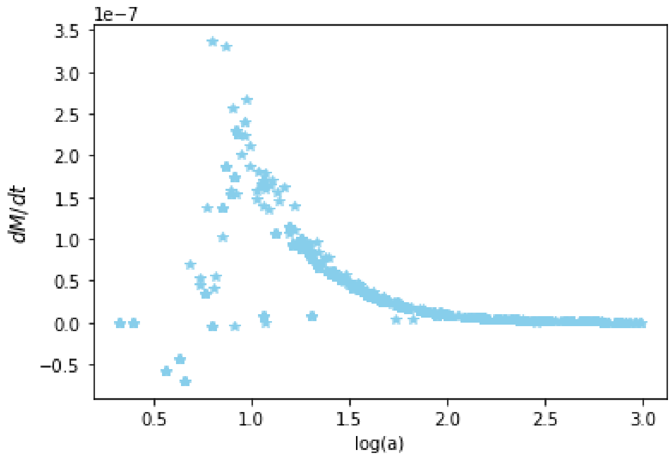

Figura 1: dM/dt en grados por siglo vs log(a) en UA para Saturno

Vemos que tiene un máximo cuando a es próximo al del planeta y luego cae hasta ser despreciable. Dicho comportamiento es el mismo para todos los planetas. Veamos ahora el conjunto de planetas para inferir la importancia de cada uno en dM/dt.

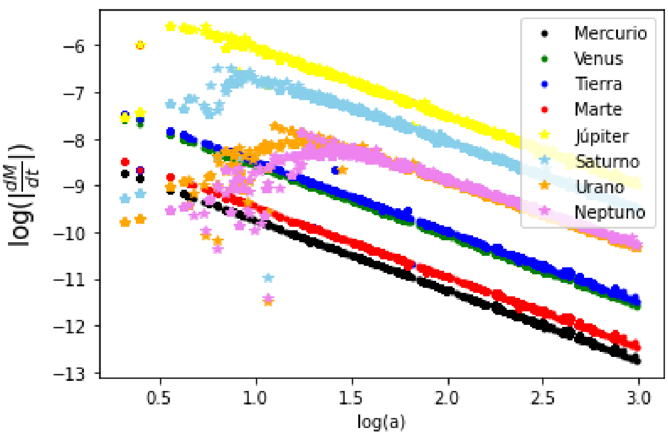

Figura 2: $log(|dM/dt|)$ en grados por siglo vs log(a) en UA para todos los planetas

Vemos que los gaseosos son más importantes por varios órdenes de magnitud, siendo Júpiter y Saturno los más relevantes. Mercurio y Venus en cambio son los menos importantes, despreciables en comparación con el resto en el comportamiento de dM/dt. Cuando nos acercamos al semieje respectivo de cada planeta notamos el cambio en la derivada, tiene un máximo para luego decrecer hasta el punto en que, para los sungrazers con semieje pequeño, Urano y Neptuno tienen menos relevancia que Venus y Mercurio, Saturno es del orden de Venus y la Tierra, y en todo momento Júpiter es el más importante. Este resultado nos indica que, para ciertos semiejes, uno no solo puede despreciar a Mercurio y Marte, sino que los últimos planetas gaseosos son aún menos importantes en la evolución de dicho elemento.

Analizando las demás derivadas en la Figura 5, vemos que, por la presencia de Saturno, que tomamos como ejemplo, obtenemos cualitativamente los mismos resultados mencionados con la diferencia de que en algunas la derivada es positiva o positiva y negativa en los entornos del planeta. Notamos además al alejarnos di/dt tendría que tender a cero, y no lo hace. Dicho resultado se debe a que di/dt depende de ϖ y este varía mucho, afectando al cálculo.

Al estudiar la relevancia de cada planeta en la variación de cualquier elemento orbital para sungrazers en relación con su semieje, vemos que, si bien particularmente poseen diferencias, a grandes rasgos obtenemos que para cualquier semieje el planeta más importante es Júpiter, para semiejes pequeños la influencia de Saturno es comparable a la de Venus y la Tierra y Mercurio y Marte son los menos relevantes. Por ultimo para semiejes aún más pequeños Neptuno y Urano son igual de relevantes que Mercurio y Marte.

4. Evolución secular del asteroide

Veamos ahora los resultados de utilizar la teoría secular semianalítica. Tomamos las ecuaciones de Lagrange y R_{sec} numérica. Utilizando el código **evosecular.f** obtenemos la órbita en función del tiempo con la suposición de que las órbitas de los planetas no cambian. Para analizar el desempeño lo comparamos con el integrador numérico **EVORB**, en donde los planetas se perturban y sus orbitas cambian.

Según Gallardo [1] aunque la teoría semianalítica puede ser válida para altas inclinaciones y excentricidades, hay regiones en donde la evolución secular no es posible, esto se puede dar cerca de planetas o para ciertas combinaciones de excentricidad y semieje. Estudiaremos entonces dos casos como ejemplo. En la Figura 7 y 8 observamos la comparación de dichos métodos para distintos sungrazers con distintos elementos orbitales, además elegimos uno que tenga semieje próximo a un planeta. El primero tiene a=2.486 UA y el segundo a=20.2 UA, próximo a Urano. Para el primero apreciamos que, si bien cualitativamente los resultados coinciden, los elementos tienen un período diferente. Analizando cómo varía el semieje con el tiempo en la Figura 3, vemos que en promedio se mantiene constante por lo que la evolución es secular.

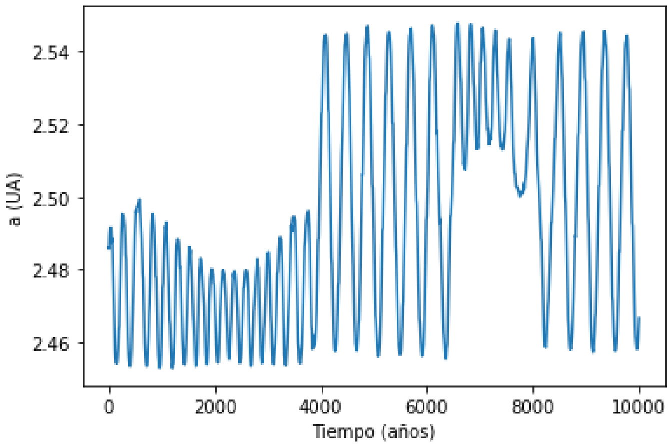

Figura 3: $a(t)$ para sungrazer con semieje inicial a=2.486 UA.

Veamos ahora el segundo. Obtenemos nuevamente un acuerdo entre los métodos y en este caso aún mejor que en el anterior a pesar de que el semieje inicial es próximo al de Urano. Analizando la evolución del semieje con el tiempo obtenemos

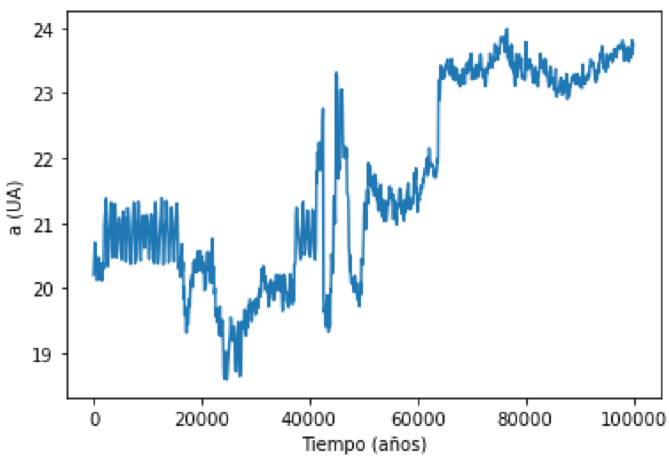

Figura 4: $a(t)$ para sungrazer con semieje inicial a=20.200 UA

Observamos que, si bien en los primeros 10000 años la evolución es próxima a una secular, en donde oscila en torno de un valor medio próxima al inicial, al tiempo cambia abruptamente alejándose de la evolución típica secular. Tenemos entonces que la evolución no es secular pero nuestra teoría semianalítica es capaz de lograr describir el comportamiento de la órbita. Este tipo de evolución es lo que Fernandez et al. 2021 [2] llama ”quasi-secular”.

2

Los sungrazers que fueron seleccionados son representativos de los casos típicos en los que no podemos aplicar la teoría analítica. El segundo tiene el extra de que aún en la teoría semianalítica hay limitaciones, pero aun así logramos describir el comportamiento de la trayectoria durante el tiempo de integración. En los dos casos notamos diferencias, uno de los motivos que da lugar a las discrepancias es que en el modelo utilizado semianalítico estamos considerando a las orbitas fijas, mientras que en la integración numérica no. Además, tanto para la teoría semianalítica como la analítica, estamos despreciando los términos de corto período.

5. Conclusión

Primero observamos la importancia de los planetas en la evolución de cada elemento orbital. Obtuvimos que sin importar el semieje del sungrazer siempre el más importante es Júpiter. El resto de gigantes puede o no, ser igual o más importante que los terrestres dependiendo del semieje.

En cuanto a la evolución temporal, cualitativamente la teoría secular semianalítica logra describir el comportamiento de los elementos orbitales en los dos casos que tomamos como ejemplo. Hay que tener en cuenta también las limitaciones que tenemos, como tomar la órbita fija de los planetas, la cual nos limitó aún más en los resultados. Observamos que el caso de alta inclinación, excentricidad y semieje próximo a un planeta, mezcla que no solo no nos permitiría estudiarlo analíticamente, sino que podría tener dificultades con la semianalítica fue descrita de forma satisfactoría por un largo período de tiempo aún así mientras su semieje variaba, obtuvimos así un comportamiento de evolución quasi-secular [2].

Referencias

[1] *Notas de Dinámica Orbital Secular y Resonante.* Tabaré Gallardo.

[2] *On the origin of the Kreutz family of sungrazing comets.* Julio A. Fernández, Pablo Lemos, Tabaré Gallardo (2021).

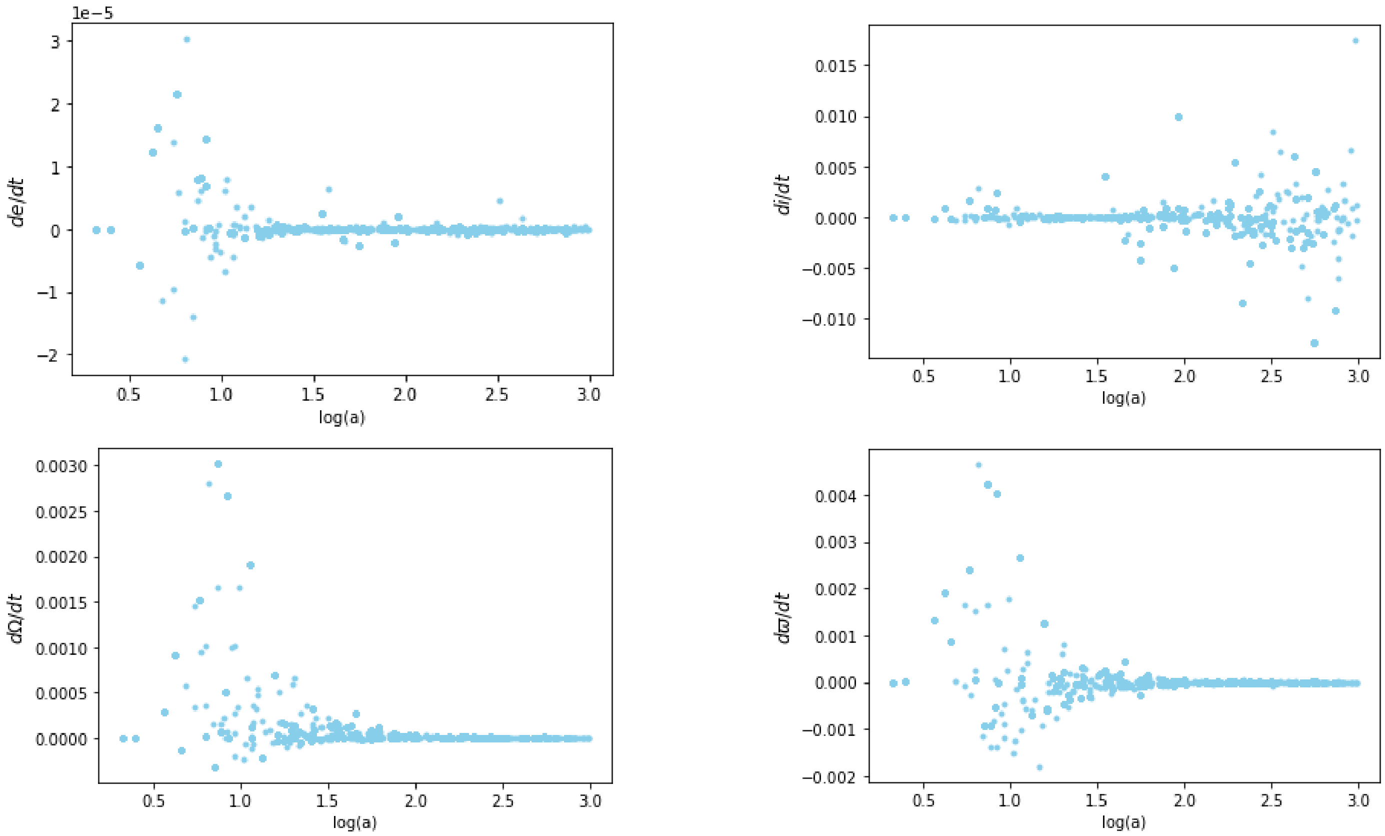

Figura 5: Derivadas de los elementos orbitales del grupo de sungrazers en grados por siglo para el caso de Saturno.

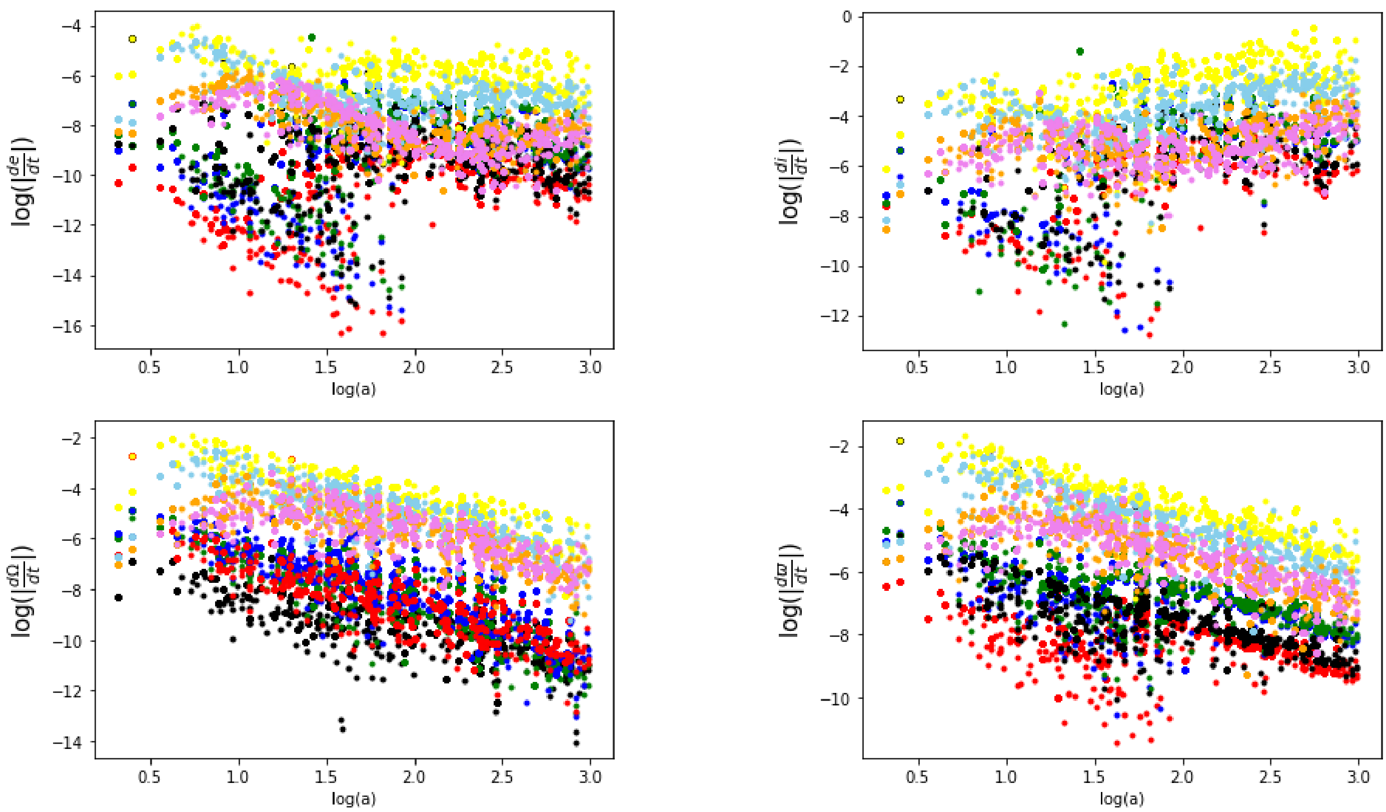

Figura 6: Derivadas de los elementos orbitales del grupo de sungrazers en grados por siglo para todos los planetas.

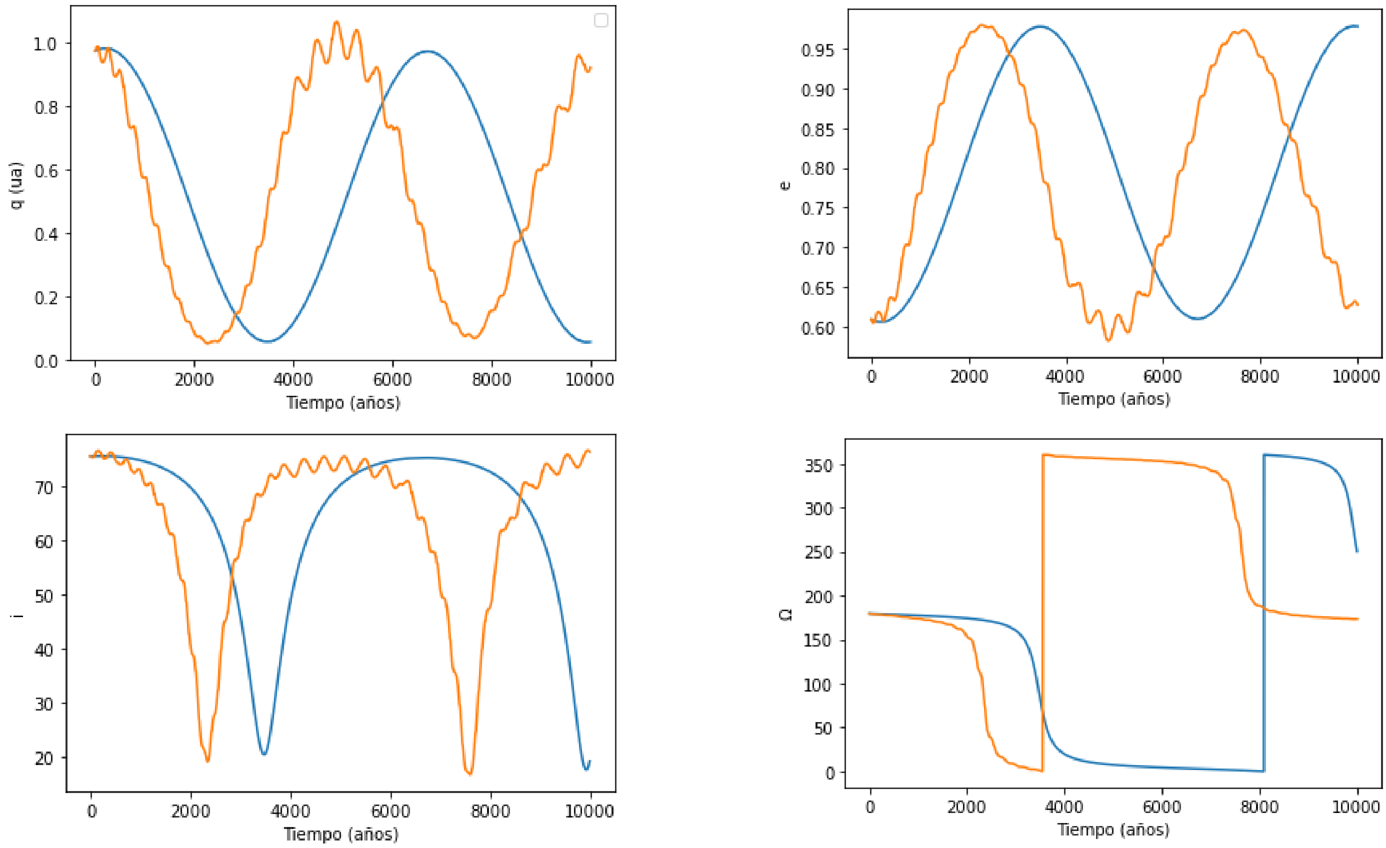

Figura 7: $q(t), i(t)$ y $\Omega(t)$ usando integrador numérico en naranja y evolución secular en azul durante 10000 años para sungrazer con $a = 2{,}486$, $e = 0{,}6093$, $i = 75{,}65°$, $\Omega = 179{,}35°$, $\omega = 177{,}34°$.

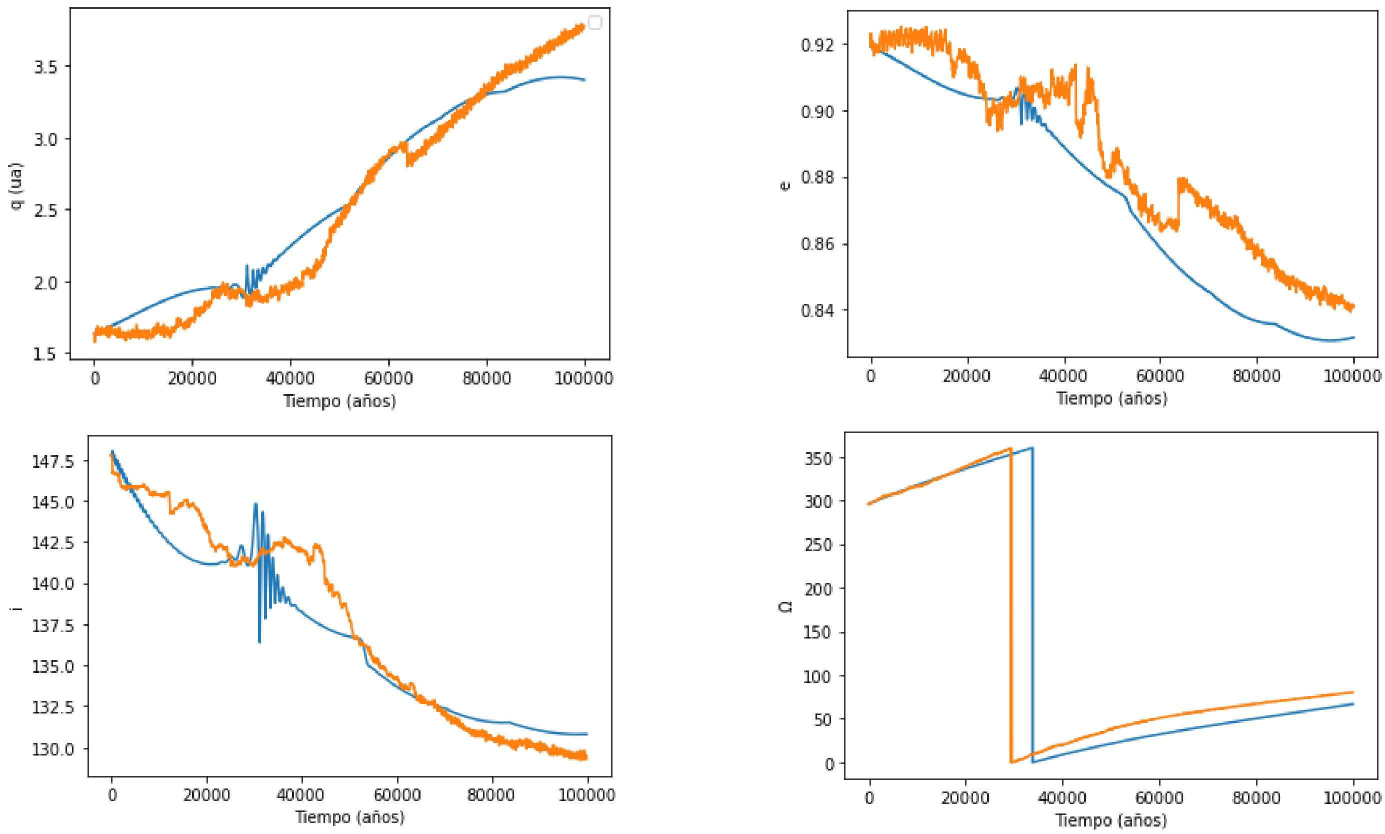

Figura 8: $q(t), e(t), i(t)$ y $\Omega(t)$ usando integrador numérico en naranja y evolución secular en azul durante 100000 años para sungrazer con $a = 20{,}2$, $e = 0{,}9190$, $i = 147{,}77°$ $\Omega = 295{,}76°$ $\omega = 224{,}5199°$.