PEDECIBA - Maestría en Física opción Astronomía

MECÁNICA CELESTE

January 19, 2023

PRACTICO I - Ecuaciones planetarias

1. Suponiendo una perturbación

$$d\mathbf{F} = R\hat{r} + T\hat{\theta} + N\hat{z}$$

con componentes según la dirección radial, transversa y normal al plano, encontrar las expresiones para $\dot{a}, \dot{e}, \dot{i}, \dot{\Omega}$ y $\dot{\omega}$ como en SSD Sección 2.9.

2. Un cometa al pasar por el perihelio recibe un impulso en la dirección radial. Encontrar las variaciones en los elementos orbitales. De acuerdo a las ecs de Gauss el semieje no cambia, sin embargo luego del impulso la velocidad radial paso de 0 a dv y por lo tanto la velocidad orbital cambio, entonces por que el semieje no cambia?

3. Los efectos relativistas del Sol en primera aproximación se pueden reproducir asumiendo una aceleración dada por

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM_\odot}{r^2}(1 + \frac{6GM_\odot}{c^2 r})\hat{r}$$

Usando las ecuaciones de Gauss calcular las variaciones medias de los elementos orbitales generados por la perturbación relativista.

4. La fricción atmosférica en un satélite artificial es una fuerza resistente en la dirección de la velocidad y con sentido contrario. Encontrar las expresiones correspondientes para las variaciones medias en los elementos orbitales a, e, i, Ω, ω para el caso de un satélite artificial frenado por la atmósfera de la Tierra, suponiendo la Tierra perfectamente esférica y que la atmósfera tiene densidad constante en toda su extensión (ver Danby pag. 330). Bajo estas hipótesis el frenado gaseoso es del tipo $-cV^2$ donde c es una constante. Una forma de plantearlo es descomponer la perturbación en R y T. No es necesario calcular las integrales, basta con expresarlas.

5. Considerando que la energía de una partícula en un potencial Kepleriano es $-\mu/(2a)$, si despreciamos el efecto de disipación de energía por mareas ¿las órbitas osculantes de un satélite en órbita entorno a un planeta de forma arbitraria deberían verificar $\dot{a} = 0$? Justifique su respuesta.

6. *(E. Chiang).* Un satélite se encuentra en una órbita contenida en el plano ecuatorial de un planeta de masa m cuyo potencial es

$$V(r, \phi) \simeq -\frac{Gm}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{(3\sin^2\phi - 1)}{2}\right]$$

donde ϕ es la latitud del satélite.

a) Encontrar una expresión para la variación de la longitud del pericentro $\dot{\varpi}$

b) Calcular la media temporal por revolución $< \dot{\varpi} >$

c) Encontrar $< \dot{a} >, < \dot{e} >$

7. *(La perversidad de los elementos osculantes según E. Chiang).* En el problema anterior suponer que el satélite se encuentra en órbita circular de radio D. Hallar el periodo orbital. Hallar la evolución temporal de los elementos de la órbita osculante $a(t)$,$e(t)$ y $\varpi(t)$.

8. *Efecto Yarkovsky.* Se pretende modelar el efecto Yarkovsky en un asteroide de elementos orbitales $a = 2.4$ ua y $e = 0.2$, imponiendo una variación constante $\dot{a} = 1 \times 10^{-8}$ ua/año a través de una perturbación $W(r)$ en la dirección de la velocidad. Hallar $W(r)$ y el efecto en la excentricidad dado por de/dt.

PRACTICO II - Función Perturbadora

1. Considere el sistema Venus-Tierra con sus elementos orbitales actuales. Utilizando el código `DisturbingFunction.nb` o el paquete `celmech` para Python determinar la función perturbadora hasta orden 2 de Venus sobre la Tierra y la de la Tierra sobre Venus.

2. Un asteroide con $a = 3.8$ ua se encuentra próximo a la resonancia 3:2 con Júpiter. Sus elementos son $e = 0.1, I = 5^o, \varpi = 100^o, \Omega = 200^o, \lambda = 300^o$. Para Júpiter podemos asumir $a' = 5.203, e' = 0.048, I' = 0^o, \varpi' = 0^o, \Omega' = 0^o, \lambda'_o = 0^o, \frac{m'}{m_c} = 1/1047.355$.

   a) Procediendo en forma análoga a la sección 6.9 de SSD (inspeccionando a mano la función perturbadora) hallar hasta segundo orden los términos de la parte secular de $< \mathcal{R} >$ y hasta primer orden los términos resonantes.

   b) Haciendo las aproximaciones que estime conveniente, resolver la parte secular para a, e, I, ϖ, Ω.

   c) Estimar la amplitud de las oscilaciones en los elementos orbitales debidas a los términos resonantes.

3. Para el problema anterior plantear la ecuaciones planetarias de Lagrange (en su forma no aproximada) para la evolución secular y resolverlas numéricamente usando Mathematica o lo que sea.

4. *(Plutinos y Twotinos).* Escribir hasta primer orden en la excentricidad los términos resonantes para la resonancia 1:2 exterior de los objetos transneptunianos (Twotinos) con Neptuno. Asumimos órbitas coplanares y Neptuno en órbita circular. Idem para la resonancia exterior 2:3 (Plutinos). Evaluar numéricamente $R_{2:3}/R_{1:2}$. Cual resonancia es mas fuerte?

5. Considere un TNO perturbado por Neptuno en órbita circular de inclinación nula y semieje $a = 30$ ua. Asumiendo al TNO con $a' = 70$ ua, $e' = 0.2$ y considerando la función perturbadora secular hasta segundo orden estimar para que valor de I' se verifica $d\varpi'/dt = 0$. Para la masa de Neptuno tomar $m/m_c = 5.15 \times 10^{-5}$.

PRACTICO III -Teoría Secular Analítica

1. *Efecto en anomalía media.* Considerando las expresiones (91) y (92) de las Notas, para el caso coplanar estimar dM/dt para una partícula perturbada por a) un planeta circular con órbita interior a la partícula y b) igual al caso anterior pero con el planeta en órbita exterior.

2. *Achatamiento.* Probar que partiendo de la funcion perturbadora debido al achatamiento dada por

$$R = -\frac{Gm_p}{r} J_2 (\frac{R_p}{r})^2 P_2(\sin\phi)$$

donde ϕ es la latitud del satélite y $P_2(\sin\phi) = (1/2)(3\sin^2\phi - 1)$ al promediar en un periodo orbital obtenemos

$$R_{sec} = \frac{Gm_p R_p^2 J_2}{4a^3(1-e^2)^{3/2}}(2 - 3\sin^2 i)$$

Hallar la ecuación para $\Omega(t)$ y encontrar cuando $d\Omega/dt$ es mayor que cero y cuando menor que cero.

3. *Anillo.* Probar que la funcion perturbadora secular R_{sec} de un planeta de masa m_p, semieje a_p y $e = i = 0$ sobre una particula de $a >> a_p$ y demas elementos arbitrarios se puede aproximar a

$$R_{sec} \simeq \frac{Gm_p a_p^2}{8a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}(2 - 3\sin^2 i)$$

siendo $M_\odot$ la masa de la estrella central. Nota: una forma de probarlo es suponer que el planeta es sustituido por un anillo circular de masa m_p y radio a_p y usando la formula de McCullagh. Notar ademas que la masa central pasa a ser equivalente a $M_\odot + m_p$.

4. *Zeipel-Lidov-Kozai interno.* Luego de promediar en λ, λ' la función perturbadora secular de un planeta en órbita circular e inclinacion cero sobre un asteroide interior de elementos $(a, e, i, \omega, \Omega)$ es

$$R_{sec} \simeq G\frac{m_p a^2}{8a_p^3}\left[2 + 3e^2 - 3(1 - e^2 + 5e^2\sin^2\omega)\sin^2 i\right]$$

que es valida siempre que $r << a_p$. Hacer mapas con curvas de nivel para el hamiltoniano en el espacio (ω, e) y (ω, i) para el caso de un asteroide de semieje $a = 2$ ua perturbado por Júpiter y que verifica $\sqrt{1-e^2}\cos i = 0.5$. Hallar ecuación para $\Omega(t)$.

5. *Zeipel-Lidov-Kozai externo.* La función perturbadora secular de un planeta en órbita circular sobre un TNO de elementos $(a, e, i, \omega, \Omega)$ según Gallardo et al. (2012) es

$$R_{sec} = \frac{Gm_p a_p^2}{16a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}(1 + 3\cos 2i + X)$$

con

$$X = \frac{9a_p^2\left(\left(2+3e^2\right)\left(9 + 20\cos 2i + 35\cos 4i\right) + 40e^2(5 + 7\cos 2i)\cos 2\omega\sin^2 i\right)}{512a^2\left(1-e^2\right)^2}$$

que es valida siempre que $r >> a_p$. Hacer mapas con curvas de nivel para el hamiltoniano en el espacio (ω, e) y (ω, i) para el caso de un TNO de semieje $a = 100$ ua perturbado por Neptuno y que verifica $\sqrt{1-e^2}\cos i = 0.5$. Hallar ecuación para $\Omega(t)$.

6. *Perturbación solar.* Considere a la Luna (de masa m despreciable) orbitando en torno de la Tierra esférica (de masa m_c) en órbita circular de inclinación i respecto al plano de la ecliptica y perturbada por el Sol (de masa $M_\odot$) que puede suponerse en órbita circular geocentrica. Calcule $\dot{\Omega}$ de la órbita lunar debido a la perturbación secular del Sol.

7. *Radio critico.* Considere a la Luna orbitando en torno de la Tierra y perturbada por el achatamiento terrestre dado por J_2, despreciando la perturbación del Sol. Calcule $\dot{\Omega}$ secular de la orbita lunar suponiendo que la inclinación de la Luna respecto al ecuador terrestre es de 23°. Compárelo con el resultado del problema anterior encuentre los valores de a para los cuales el movimiento del nodo es dominado por el achatamiento y los valores para los cuales es dominado por la perturbación solar

8. *Pastoreo de perihelios de asteroides (SSD 6.9.1).* Un ploteo de la distribución de las longitudes de perihelio de los asteroides muestra un agrupamiento en torno a la longitud del perihelio de Júpiter. a) Separando adecuadamente los términos seculares de menor orden en la expansión de la función perturbadora y asumiendo que el movimiento es plano encuentre una expresión para los $\dot{\varpi}$ de los asteroides. b) Tomando $a_J = 5.203$ ua, $e_J = 0.048$, $m_J/m_S = 0.001$, $a = 2.86$, $e = 0.15$ y $I_J = I = 0^o$ calcular numéricamente $\dot{\varpi}$ en dos casos: (i) $\varpi - \varpi_J = 0^o$ y (ii) $\varpi - \varpi_J = 180^o$. c) Utilizando estos resultados explique la distribución observada de perihelios.

PRACTICO IV -Teoría Secular Semianalitica

1. *Frecuencias fundamentales.* Integrar numéricamente con EVORB u otro integrador el sistema formado por los 4 planetas gigantes por 10 Ma (con paso 0.2 años y con salida cada 2000 años, por ejemplo). Usando `sacahkpq` calcular la evolución temporal de las variables (h, k, p, q) y analizando el espectro de estas variables determinar las frecuencias fundamentales del sistema. Nota: usando `propiosh` y `propiosq` sobre la salida del EVORB es inmediata la determinación de frecuencias.

2. *Resonancias seculares.* Utilizando el código `Rsecderiv` construir una gráfica $d\varpi/dt$ en función de $0.1 < a < 2$ ua para un asteroide de elementos $e = 0.1$, $i = 30$, $\omega = 60$ perturbado por los cuatro planetas gigantes en órbita circular y plana (a efectos de eliminar los modos forzados). Conociendo los valores de las frecuencias fundamentales reales g_5, g_6, g_7, g_8 determinar para que valores de a el asteroide estará afectado por una resonancia secular.

3. Utilizando el código `Rsecderiv` construir una gráfica de/dt en función de $0.1 < a < 10$ ua para un asteroide de elementos $e = 0.1$, $i = 30$, $\omega = 60$ perturbado por Júpiter en órbita circular y plana.

4. Utilizando el código `Rsecderiv` considerando todos los planetas del sistema solar determinar que planeta es mas importante en la evolucion de un asteroide de $a = 1.3$ ua, un centauro de $a = 17$ ua y un TNO de $a = 42$ ua. En todos los casos asumir $e = 0.1$, $i = 30$, $\omega = 60$.

5. *Componentes forzadas y propias.* Utilizando el código `evosecular` (que considera a los planetas perturbadores en órbitas fijas) integre por 40000 años el asteroide 4147 Lennon considerando los 4 planetas gigantes con sus elementos orbitales actuales. Grafique en los planos (k, h) y (q, p) y obtenga los valores propios y forzados de los elementos (e, i). Deduzca las frecuencias propias. Compare con los resultados que se dan en AstDyS.

6. Intente hacer lo mismo que en el ejercicio anterior pero con $i = 20^o$, explique el resultado obtenido. Como son las frecuencias propias ahora?

7. *Zeipel-Lidov-Kozai.* Considerar el sistema de planetas gigantes en órbitas circulares y planas. Usando el codigo `mapakozai` estudiar la posible evolución orbital de un cometa de $a = 10$ ua, $e = 0.7$, $i = 150^o$ y $\omega = 70^o$. Hacer curvas de nivel de $R_{sec}(\omega, i)$ y $R_{sec}(\omega, e)$ e identificar la curva correspondiente al cometa. Identificar las curvas de colision con los planetas. Haciendo curvas de nivel con diferentes conjuntos de planetas determine cuales son los planetas que influyen mas en la dinamica del cometa. Que modelo analítico se podría aplicar en este caso?

PRACTICO V - Resonancias

1. Hurgando en la base de datos de DACE seleccionar todos los sistemas planetarios que contengan 2 planetas. Calcular el cociente de periodos orbitales entre el planeta externo y el interno. Hacer un histograma de cocientes de periodos orbitales y reconocer posibles efectos de resonancias de movimientos medios.

2. *Términos resonantes.* Para la resonancia 3:2 con Júpiter usando `DisturbingFunction.nb` o `celmech` determine los 6 ángulos críticos con las respectivas potencias en e, $e' = e_J$ y s de sus coeficientes hasta orden total 3, suponiendo a Júpiter en órbita excéntrica pero de inclinación cero ($s' = 0$).

3. *Modelo analítico plano.* Las resonancias internas de orden 1 y coplanares con Júpiter (supuesto en órbita circular) se pueden estudiar con el Hamiltoniano aproximado dado por el Segundo Modelo Fundamental:

$$\mathcal{H} = \delta\Phi + \Phi^2 - 2\sqrt{2\Phi}\cos(\sigma)$$

   donde σ es el angulo critico y $0 < \Phi < 5$ su momento conjugado que depende de (a, e). Trabajando en las coordenadas rectangulares $(x, y) = (\sqrt{2\Phi}\cos(\sigma), \sqrt{2\Phi}\sin(\sigma))$ hacer curvas de nivel del $\mathcal{H}(x, y)$ para diferentes valores del parámetro $-15 < \delta < 15$. Identifique el rango de valores de δ para los cuales aparece la separatriz (en esos casos se dice que existe resonancia). Identifique el valor del punto de equilibrio σ_0.

4. *Modelo semi-analítico espacial.* Usando el código Resonalyzer que evalúa numéricamente la R_{res} explorar la resonancia 1:1 con Júpiter en el intervalo $(0 < e < 0.9, 0 < i < 90, \omega = 0)$ buscando los rangos de (e, i) en los que existen las libraciones tipo Troyanos (asimétricas).

5. *Resonancia con la Luna.* Si hubiera una partícula en órbita geocentrica de $e = 0.5$ coplanar con la Luna y en la resonancia interna 3:1 con la Luna calcular el ancho en km que tendría la resonancia así como la expresión del angulo critico principal, su punto de equilibrio σ_0 y el periodo de libracion usando Resonalyzer. Suponiendo que se verifica $\sigma(t) = \sigma_0$, calcular el angulo Luna-Tierra-partícula cada vez que la partícula esta en el apogeo.

6. *Curva de Colisión.* Considere la resonancia externa 2:3 de una partícula con un planeta en órbita circular y con órbitas coplanares. Siendo el angulo critico

$$\sigma = 3\lambda - 2\lambda_p - \varpi$$

   a) Determine para que valores de e y σ puede haber colisión entre la partícula y el planeta.
   b) Represente los resultados en un gráfico $k = e\cos\sigma, h = e\sin\sigma$.

7. *Identificación de resonancia.* Un asteroide del sistema solar de excentricidad $e = 0.3$, inclinación $i = 10°$ y argumento del perihelio $\omega = 100°$ parece estar capturado en una resonancia manteniendo su semieje entre 2.80 y 2.85 ua. Calculando un atlas de resonancias en esa region determine de qué resonancia se trata y con qué planeta. Cuál es el angulo critico principal y en torno de qué valor puede estar librando? Cuál es el periodo de las libraciones y el ancho en uas de la resonancia? Qué debemos hacer para verificar que efectivamente está capturado en esa resonancia? Nota: utilizar los programas Superatlas y Resonalyzer.

8. *(Plutinos y Twotinos de nuevo).* Asumiendo Neptuno en órbita circular explorar qué resonancia es mas fuerte entre la externa 1:2 (Twotinos) y la 2:3 (Plutinos) utilizando Resonalyzer.