

Caos en el Sistema Solar

Pablo Lemos



June 7, 2016



Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Reseña histórica
- 3 Diagnóstico del caos
- 4 Aplicación al Sistema Solar

¿Qué es el caos?

El término caos proviene del griego $\chi\alpha\omicron\varsigma$ y hace referencia al estado de vacío previo a la formación del Universo ($\kappa\omicron\sigma\mu\omicron\varsigma$).

En física, decimos que la teoría del caos es la rama que estudia el comportamiento de sistemas dinámicos que son altamente sensibles a las condiciones iniciales del problema.

Chaos: When the present determines the future, but the approximate present does not approximately determine the future. E. Lorenz

¿Dónde podemos encontrar caos?

En muchos sistemas dinámicos, aunque sean muy simples

Uno de los ejemplos más conocidos es el del péndulo doble.

Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Reseña histórica**
- 3 Diagnóstico del caos
- 4 Aplicación al Sistema Solar

- ▶ 1687: Newton publica *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, que sienta las bases matemáticas de la física. Comienza el trabajo en el problema de 3 cuerpos atraídos gravitacionalmente.
- ▶ 1776: Laplace publica *Traité du Mécanique Céleste*, donde afirma que la dinámica del Universo es enteramente determinista.
- ▶ 1890: Poincaré gana un concurso del rey Oscar II de Noruega sobre las soluciones del problema de 3 cuerpos. No lo resuelve, sino que plantea casos particulares.



- ▶ Entre 1930 y 1960 hay avances en cuestiones teóricas (Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser, Cartwright, Littlewood, Smale).
- ▶ 1961: Edward Lorenz, trabajando en un modelo meteorológico para predecir el tiempo, encuentra que este sistema presenta grandes variaciones a partir de cambios muy pequeños en las condiciones iniciales.

- ▶ 1982: Se crea el proyecto *Longstop*, supercomputadora que simula la evolución de los planetas gigantes. Dos grupos continúan con el trabajo: Wisdom y Laskar.
- ▶ En los años siguientes: *Wisdom et al.* muestran que el cinturón de asteroides tiene un hueco en la resonancia 3:1 con Júpiter debido al caos (1982), que Hiperion tiene una rotación caótica (1984). Laskar estudia la caoticidad del Sistema Solar entero (1989).



Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Reseña histórica
- 3 Diagnóstico del caos**
- 4 Aplicación al Sistema Solar

La principal herramienta para investigar sobre el caos son las simulaciones numéricas

El estudio del caos está muy ligado a el desarrollo de computadoras más potentes.

Para simular un sistema físico necesitamos una ecuación que modele su comportamiento, por ejemplo:

$$\vec{F} = m \times \vec{a} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Si uso el modelo anterior, para un sistema de N partículas tengo que resolver $3 \times N$ ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Para sistemas grandes esto puede resultar complicado, por lo que busco un enfoque más sencillo: la energía.

Si K es la energía cinética y V la energía potencial, se define el Hamiltoniano del sistema como:

$$\mathcal{H} = K + V$$

\mathcal{H} no depende de variables “comunes”, sino de variables *canónicas*

Las variables canónicas (q_i, p_i) son aquellas que cumplen ciertas relaciones entre sí:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0, \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Por ejemplo, (x, v_x) no son variables canónicas, pero (x, p_x) si lo son. Las ecuaciones que modelan al sistema son:

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$$

Existen transformaciones $(q, p) \mapsto (Q, P)$ que hacen que el hamiltoniano siga describiendo al mismo sistema pero cambie su forma (usualmente a una más sencilla).

Ejemplo: oscilador unidimensional ($q \rightarrow x, p \rightarrow mv$)

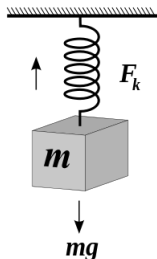
$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$p = \sqrt{2m\omega P} \cos(Q)$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q)$$

↓

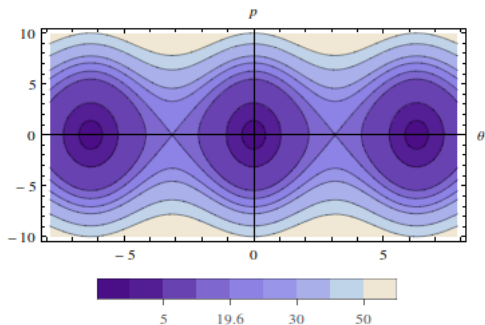
$$\mathcal{H}(Q, P) = \omega P$$



Ventaja: Permite expresar el hamiltoniano (y por ello las ecuaciones) de manera más sencilla.

Desventaja: Ya no estamos hablando de “posición” y “velocidad” en su sentido usual.

(q, p) forman el llamado *espacio de fases*. Para un péndulo simple:



¿Qué pasa cuando tengo más grados de libertad?

El espacio de fases tiene más dimensiones y las ecuaciones son mucho más complicadas. Para solucionarlo estudiamos la geometría (topología) de las soluciones:

- ▶ Soluciones periódicas: Solución que forma un camino cerrado en el espacio de fases.
- ▶ Soluciones cuasiperiódicas: Combinación de varios movimientos periódicos, cuya solución no forma una trayectoria cerrada, pero casi.

¿Cuál es la forma de la solución de un movimiento periódico o cuasiperiódico en el espacio de fases?

UN TOROIDE

Para estudiar estas soluciones no necesito la trayectoria completa, sino que puedo intersectarla con un plano Σ y estudiar los puntos de intersección:

Sección de Poincaré

Definimos el mapa como:

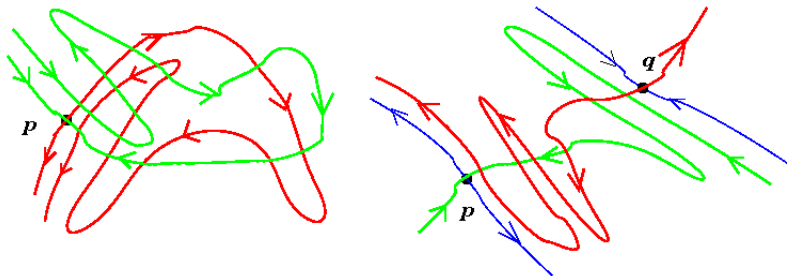
$$f : \Sigma \rightarrow \Sigma / f(x_n) = x_{n+1}$$

A su vez, definimos un punto fijo p como el que cumple

$$f(p) = p \Rightarrow \text{Movimiento periodico}$$

En un mapa de Poincaré, las soluciones cuasiperiódicas van variando en pasos muy pequeños formando una curva cerrada.

Problema: esas curvas cerradas se pueden cruzar, generando puntos homoclínicos y heteroclínicos



Exponente de Lyapunov

Caracterización de la tasa de separación de dos trayectorias separadas infinitesimalmente:

Sean $x_1(0)$ y $x_2(0)$ dos estados iniciales infinitesimalmente próximos:

$$x_1 - x_2 = \delta x_0 \rightarrow 0$$

La separación en función del tiempo puede expresarse como

$$|\delta x(t)| = e^{\lambda t} |\delta x_0|$$

En el caso de que el espacio de fases tenga n dimensiones, existe un conjunto $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de exponentes de Lyapunov

En el caso de los mapas,

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) = f^n(x_0) \\ |\delta x_{n+1}| &= e^{\lambda n} |\delta x_0| \end{aligned} \right\} \quad \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

En el caso de sistemas conservativos n-dimensionales, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, por lo que se analiza sólo el mayor exponente

Contenidos

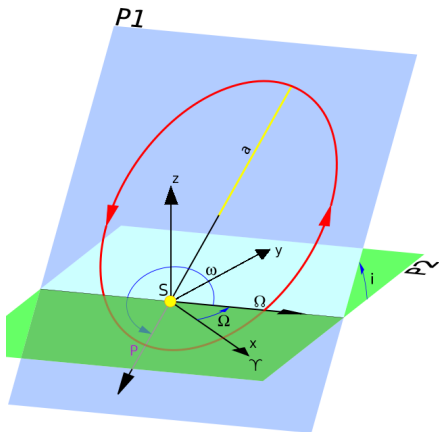
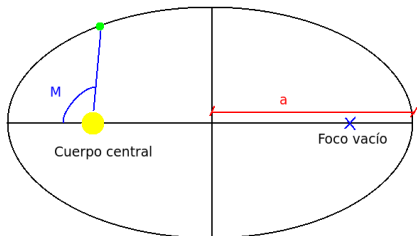
- 1 Introducción
- 2 Reseña histórica
- 3 Diagnóstico del caos
- 4 Aplicación al Sistema Solar**

En el Sistema Solar, el caos está dado por la superposición de resonancias.

Una resonancia es un fenómeno relacionado con los movimientos periódicos o cuasi-periódicos en el que se produce un reforzamiento de la oscilación por efecto de una perturbación externa.

Repaso: Coordenadas

Se pueden usar coordenadas cartesianas $\{x, y, z, v_x, v_y, v_z\}$ o elementos orbitales $\{a, e, M, i, \omega, \Omega\}$



Tercera ley de Kepler: $n = \frac{k}{a^{3/2}}$

La ecuación de movimiento de un cuerpo de masa M_1 orbitando al Sol y perturbado por otro cuerpo de masa M_2 es:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + \mathcal{G}(M_\odot + M_1) \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = \nabla \mathcal{R}$$

Donde \mathcal{R} es la perturbación generada por el cuerpo 2. Se puede expresar en forma de serie:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{G}M_2}{a_2} \sum_j \phi_j(a_1, a_2) e_1^{|j_3|} e_2^{|j_4|} i_1^{|j_5|} i_2^{|j_6|} \\ \times \cos(j_1 \lambda_1 + j_2 \lambda_2 + j_3 \varpi + j_4 \varpi_2 + j_5 \Omega_1 + j_6 \Omega_2)$$

$$\text{Donde } \begin{cases} j_i \in \mathbb{Z}, \sum j_i = 0 \\ \varpi = \omega + \Omega \\ \lambda = M + \varpi \end{cases}$$

Conviene pasar de elementos orbitales a *variables de Delaunay modificadas*:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sqrt{\mathcal{G}(M_{\odot} + M_1)a_1} & \lambda &= M + \varpi \\ P &= \sqrt{\mathcal{G}(M_{\odot} + M_1)a_1(1 - \sqrt{1 - e^2})} & p &= -\varpi \\ Q &= \sqrt{\mathcal{G}(M_{\odot} + M_1)a_1(1 - e^2)(1 - \cos i)} & q &= -\Omega \end{aligned}$$

Con esto el hamiltoniano queda:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{2L^2} - \mathcal{H}_1$$

Donde \mathcal{H}_1 es la perturbación \mathcal{R} expresada en estas variables

Usando la definición de Λ y la ecuación de hamilton:

$$\Lambda = \sqrt{\mathcal{G}(M_{\odot} + M_1)a_1} \Rightarrow \frac{d\Lambda}{dt} = \frac{\Lambda}{2a} \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{d\mathcal{H}}{d\lambda} = -\frac{d\mathcal{H}_1}{d\lambda} = -\frac{d\mathcal{R}}{d\lambda}$$

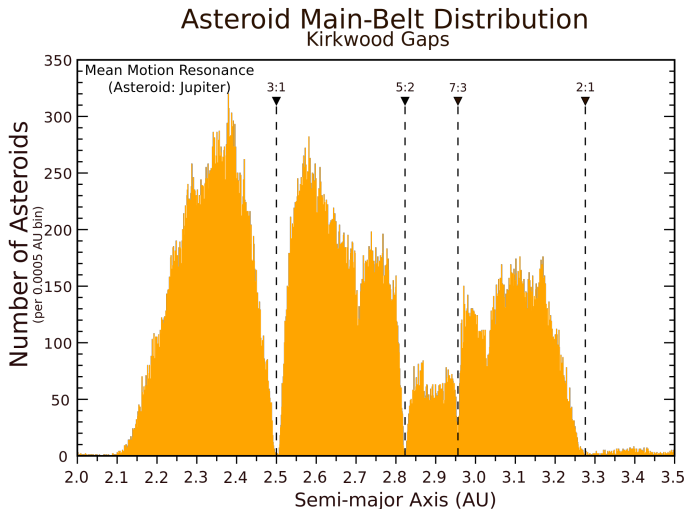
$$\Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{2a}{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda}$$

Ejemplo de resonancia: Supongamos que me interesa un término de la función perturbadora con coeficientes $\{2, -5, 3, 0, 0, 0\} \Rightarrow \mathcal{R} = \phi(a_1, a_2)e_1^3 \cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3\varpi_1) + \mathcal{O}(e^4)$ Con esto

$$\frac{da_1}{dt} = C_1 \sin(2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3\varpi_1) + \mathcal{O}(e^4)$$

$$a_1(t) - a_1(0) = C_2 \frac{n_1}{2n_1 - 5n_2 + 3\dot{\varpi}_1} \cos(2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 3\varpi_1) + \mathcal{O}(e^4)$$

El ejemplo más visible de la acción de estas resonancias son los *gaps de Kirkwood*:

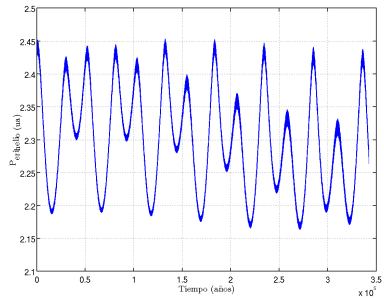
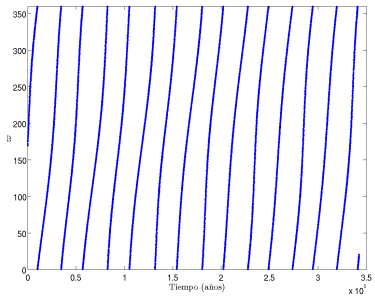


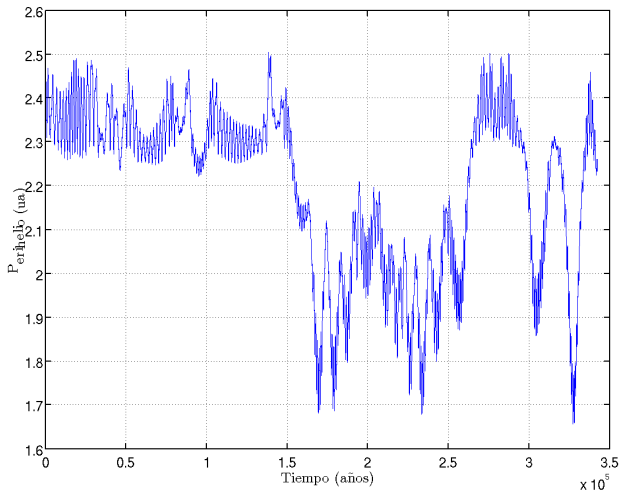
Wisdom (1982) estudió la resonancia 3:1, encontrando que allí se encuentra no solo esta resonancia, sino que al mismo tiempo otras llamadas *resonancias seculares*

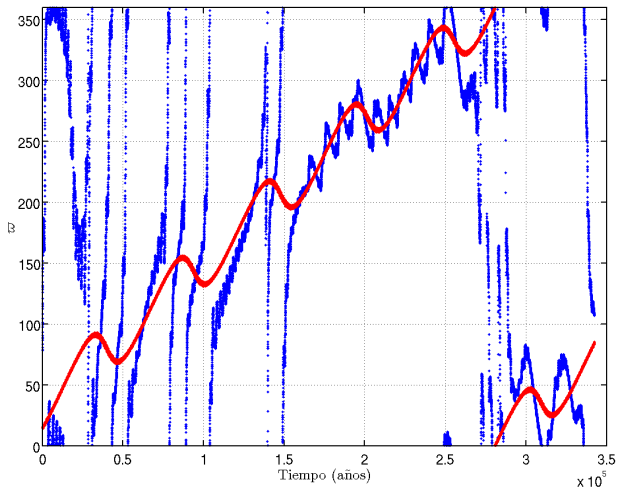
saeculum: Palabra latina que significa siglo o largo periodo de tiempo.

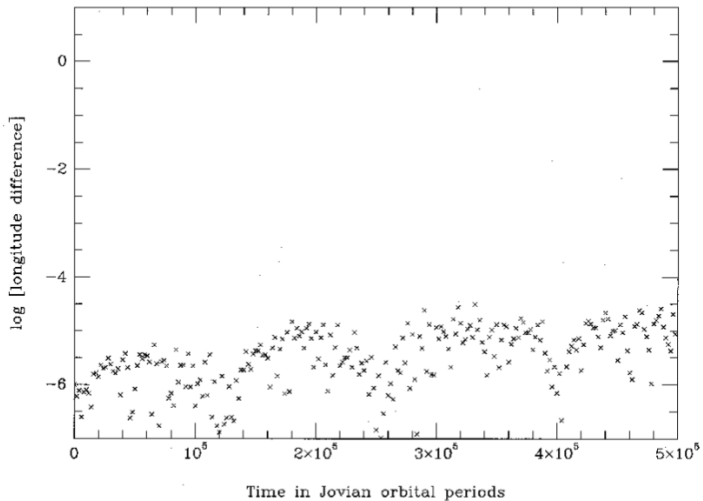
Se trata de resonancias en las que los coeficientes $j_1 = j_2 = 0$. Esto implica que pueden deberse a acoplamientos con $\dot{\omega}$ o $\dot{\Omega}$ del forzante.

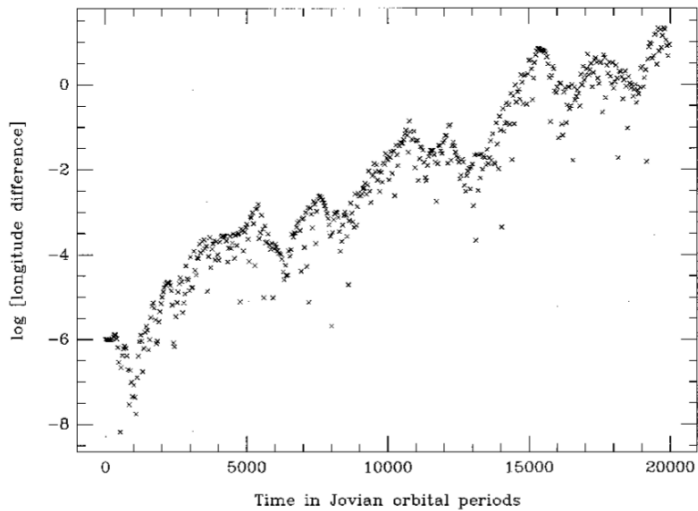
En el Sistema Solar estas resonancias se denotan como ν



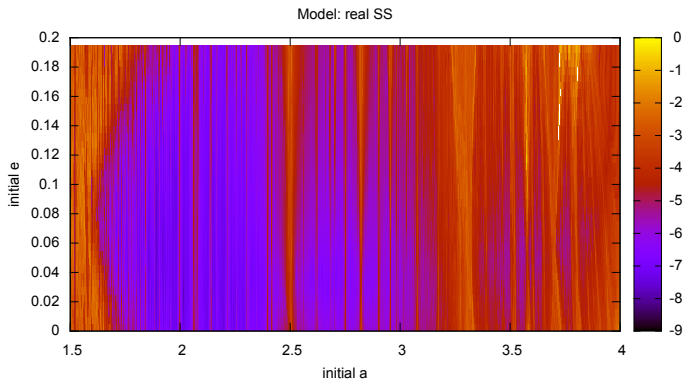




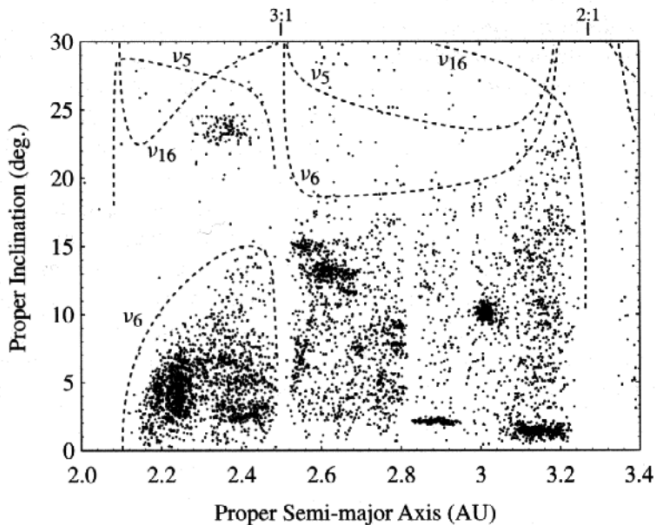




¿Qué pasa en la resonancia 3:1?

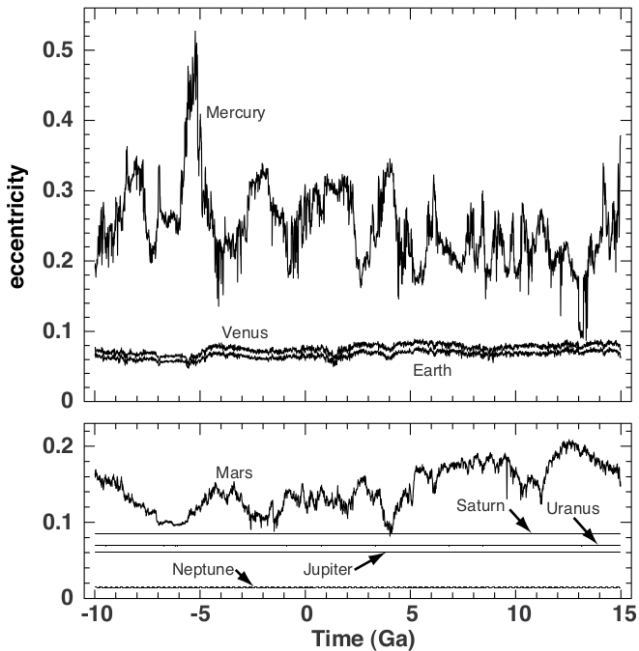


¿Qué pasa en la resonancia 3:1?



¿Qué pasa con todo el Sistema Solar?

- ▶ 1986-1989: Planetas gigantes por 210 millones de años: estable
- ▶ Wisdom 1988: Planetas gigantes por 875 millones de años: signos de caoticidad en Plutón.
- ▶ Laskar:
 - ▶ 1985: Desarrolla un método que no modela el movimiento de los planetas, sino la deformación secular de sus órbitas por un polinomio de 153824 términos, permitiendo un paso de integración de hasta 500 años, aún para planetas internos.
 - ▶ 1989: El Sistema Solar interno es caótico con un tiempo característico de 5 millones de años: error de 15 *m* en la posición de la Tierra → error de 150 *m* tras 10 millones de años → error de 1.5×10^{11} *m* en 100 millones de años.



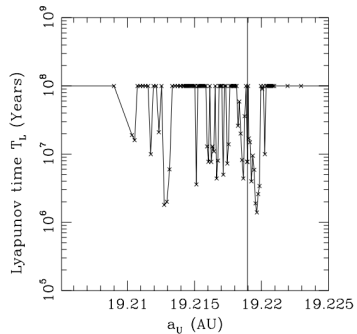
Hasta este momento: Sistema Solar caótico pero estable (Mercurio sin encuentros por lo menos en los próximos 10^4 Gyrs).

Sin embargo, los estudios analíticos hasta ese momento no tenían en cuenta otro tipo de resonancias: *resonancias de 3 cuerpos* \rightarrow muy débiles por ser de segundo orden en la masa

$$\mathcal{R} \propto M_J M_S \cos(p\lambda_J - q\lambda_S + l\lambda_U)$$

Con esto, el tiempo característico para Urano es $\sim 10^7$ yrs

Murray y Holman estimaron el tiempo en que Urano tendría un encuentro con Saturno, obteniendo un tiempo de 10^{18} años. (Edad del Universo: 13.7×10^9 años)



FIN

¿Preguntas, comentarios, sugerencias?

Integradores numéricos

Integradores simplécticos: conservan la 2-forma $dp \wedge dq \Rightarrow$ conservan el hamiltoniano en cada paso de integración

$\dot{z} = \{z, \mathcal{H}(z)\} \Rightarrow$ Se define el operador $D_{\mathcal{H}}(\cdot) = \{\cdot, \mathcal{H}\}$

$\dot{z} = D_{\mathcal{H}}z \Rightarrow z(\tau) = z(0)e^{D_{\mathcal{H}}\tau}$

Si el hamiltoniano es separable $\mathcal{H}(p, q) = T(p) + V(q) \Rightarrow D_{\mathcal{H}} = D_T + D_V$

Los mapas symplecticos aproximan ese operador:

$$e^{\tau(D_T + D_V)} \simeq \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau D_T} e^{d_i \tau D_V} + \mathcal{O}(\tau^{k+1}) \quad \text{con} \quad \sum_i c_i = \sum_i d_i = 1$$

$$D_T^2 z = \{\{z, T\}, T\} = \{\{(\dot{q}, 0)\}, T\} = 0$$

$$e^{aD_T} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(aD_T)^i}{i!} \Rightarrow e^{aD_T} = 1 + aD_T$$

Resonancias seculares

Caso 2 perturbadores hasta 2^{do} orden en excentricidad e inclinación

$$\mathcal{R}_j^{sec} = n_j a_j^2 \left[\frac{1}{2} A_{jj} e_j^2 + A_{jk} e_1 e_2 \cos(\varpi_1 - \varpi_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B_{jj} I_j^2 + B_{jk} I_1 I_2 \cos(\Omega_1 - \Omega_2) \right]$$

Con coeficientes A y B dependiendo del semieje.

Se define

$$h_j = e_j \sin(\varpi_j), \quad p_j = I_j \sin(\Omega_j)$$

$$k_j = e_j \cos(\varpi_j), \quad q_j = I_j \cos(\Omega_j)$$

Las soluciones son oscilaciones con frecuencias de autovalores de las matrices \mathcal{A} y \mathcal{B}