

## PRÁCTICA 3 – CTE I 2016

### COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

#### **OBJETIVOS GENERALES:**

- Comprender conceptos básicos de la Teoría de Propagación de Errores experimentales.
- Entender el concepto de medios granulares y sus diferentes aplicaciones; incluyendo escenarios geológicos y astronómicos.
- Aprender cómo referenciar otros trabajos y a construir la bibliografía para informes, monografías, revistas científicas, libros, tesis, etc...

#### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- Discutir la importancia del **modelo** a utilizar cuando se estudia determinado fenómeno
- Estudio de la disipación de energía en medios granulares.

#### **CONOCIMIENTOS PREVIOS:**

- Balance energético en una colisión partícula - superficie (energía elástica, energía cinética, energía disipada)

#### PRIMERA PARTE

##### **Propagación de errores experimentales**

Es ampliamente sabido que cuando reportamos el valor de una magnitud física, la misma debe ir acompañada de su error y unidades correspondientes. Al efectuar una medida directa de cierta magnitud física, lo hacemos con un cierto error asociado; que puede depender de muchos factores (que más o menos pueden ser acotados por un valor que en general conocemos). Este valor puede ser dado por el fabricante del dispositivo (por ejemplo en el caso de un voltímetro de buena calidad) o ser directamente la apreciación del instrumento (en el caso de un instrumento digital simple o de un instrumento analógico en el que preferimos no estimar). De todas formas basta con establecer cual es el error en nuestra medida para reportar la misma correctamente. Esto es fácil en los casos mencionados anteriormente, porque tales eran “medidas directas”.

El problema es que no siempre disponemos de un instrumento capaz de medir la magnitud deseada. Supongamos que necesitamos medir el volumen de agua que contiene una piscina. La magnitud física que queremos medir entonces es el *volumen* y necesitamos una cubeta graduada para hacerlo. Si ponemos el agua de la piscina dentro esta cubeta habremos medido el volumen de agua. Para conocer el error que cometimos en nuestra medida bastaría con fijarse en la apreciación de la cubeta (dato del fabricante que en general se encuentra impreso en la misma). Y de estar forma comunicar la medida del siguiente modo:

$$(V \pm \Delta V) [L^3]$$

Donde el símbolo  $[L^3]$ , indica una cierta unidad de longitud al cubo ( $m^3$ ,  $cm^3$ , etc.)

Pero supongamos que no disponemos de una cubeta que mida volúmenes (lo que es casi seguro para el caso de un volumen de agua tan grande como el de una piscina). Ahí es cuando si uno se da cuenta de que *la piscina es de base rectangular*, entonces se pueden medir los lados y la profundidad, efectuar una multiplicación y a partir de ahí saber el volumen de agua contenido en la misma. Pero surgen las siguientes preguntas: ¿qué error hemos cometido en ese cálculo? ¿Los errores se multiplican? ¿Se suman?

Dado que hemos determinado el volumen de forma indirecta (midiendo tres longitudes), debemos estudiar como se propaga el error de tomar tres medidas distintas al volumen final de agua. Cada una de las medidas de los lados de la piscina es una medida independiente de las otras dos, por lo tanto estará afectada de su propio error:

$$\begin{cases} l_1 \pm \Delta l_1 \rightarrow \text{Largo} \\ l_2 \pm \Delta l_2 \rightarrow \text{Ancho} \\ l_3 \pm \Delta l_3 \rightarrow \text{Profundidad} \end{cases}$$

Del análisis matemático puede demostrarse que dada una magnitud física  $M$ , que es función de otras magnitudes físicas  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  cuyos errores independientes son  $\Delta x_1; \Delta x_2; \dots; \Delta x_n$ , tiene un error total asociado dado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} M &= M(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \Delta M &= \left| \frac{\partial M}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial M}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial M}{\partial x_n} \right| \Delta x_n \end{aligned} \quad \text{Ec. 1.1}$$

Las cantidades entre paréntesis de valor absoluto son las derivadas parciales de  $M$  y están evaluadas en las medidas realizadas  $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ . En forma más compacta  $\Delta M$  queda de la siguiente forma:

$$\Delta M = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial M}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \quad \text{Ec. 1.2}$$

A este procedimiento se le conoce como *propagación de errores* sobre la magnitud física  $M$  y el resultado final se expresa de acuerdo a la Ec 1.3, recordando añadir las unidades correspondientes.

$$(M \pm \Delta M) \quad \text{Ec. 1.3}$$

**Ejemplo 1** Volviendo al ejemplo de la piscina, queremos calcular el volumen de agua contenido conociendo las medidas de la misma con sus respectivos errores. El volumen de la piscina es el producto de las tres medidas realizadas

$$V = V(l_1, l_2, l_3) = l_1 l_2 l_3$$

Supongamos por comodidad que se trata de una piscina de base cuadrada y sus medidas resultaron ser  $l_1 = l_2 = 2,50$  m y  $l_3 = 0,80$  m y sus errores respectivos son  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,01$  m. Luego el volumen es

$$V = 5 \text{ m}^3$$

Solo falta calcular el error  $\Delta V$  mediante la propagación de errores

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial l_1} \right| \Delta l_1 + \left| \frac{\partial V}{\partial l_2} \right| \Delta l_2 + \left| \frac{\partial V}{\partial l_3} \right| \Delta l_3$$

$$\Delta V = |l_2 l_3| \Delta l_1 + |l_1 l_3| \Delta l_2 + |l_1 l_2| \Delta l_3$$

$$\Delta V = |2|0,01 + |2|0,01 + |6,25|0,01$$

$$\Delta V = 0,1025 \text{ m}^3$$

$$\Delta V \approx 0,1 \text{ m}^3$$

Luego comunicamos el resultado del volumen como sigue

$$V = 5,0 \pm 0,1 \text{ m}^3$$

## SEGUNDA PARTE

### 2.1 Medios granulares

Los medios granulares son aquellos formados por un cierto número de objetos macroscópicos de cualquier tamaño (llamados granos) que interaccionan por medio de contactos temporales o permanentes.

Todos los materiales que se presentan en forma de granulados (cereales, arena...) o polvos (talco, harina...) son estudiados por la física de medios granulares. Los avances en el conocimiento del comportamiento de estos materiales tienen múltiples aplicaciones en la industria agrícola, alimenticia, de la construcción y farmacéutica, entre otras; como por ejemplo: almacenamiento y transporte de granos, píldoras y materiales de construcción.

El material granular representa un tipo de materia cuyo comportamiento no puede describirse adecuadamente en términos de los métodos convencionales (comportamiento de sólidos, líquidos o gases). Si bien cada partícula es un sólido independiente, un conglomerado de partículas granulares muestra comportamientos inusuales diferentes a los de los sólidos, debido a que la interacción dinámica entre las partículas es disipativa, es decir, no se conserva la energía.

En este tipo de procesos se han identificado fenómenos por todos conocidos pero que no son comprendidos totalmente hasta el momento, como ser atascamiento de granos, formación de arcos de partículas, segregación por tamaño, respuesta a golpes e impactos, fracturación, etc. Estos procesos se han estudiado experimentalmente, mediante el desarrollo de experiencias de laboratorio que reproducen los fenómenos, y en las últimas décadas en forma numérica, a través de modelos computacionales.

El método de los elementos discretos (Discrete Element Method - DEM) simula el comportamiento mecánico de un medio formado por un conjunto de partículas las cuales interactúan entre sí a través de sus puntos de contacto (Cundall & Strack, 1979). En la figura 2.1.1, se tiene una demostración del proceso de segregación por tamaño de un medio granular compuesto por diferentes partículas que está sometido a reiteradas sacudidas (Kudrolli 2004)



Fig. 2.1.1 Caja con bolitas de diferente tamaño que se hace sacudir para ver el proceso de segregación por tamaño. Tal efecto se conoce como Efecto de las Nueces de Brasil.

Se han observado procesos asociados a medios granulares en una variedad de escenarios geológicos, tales como la formación y transporte de dunas, vibraciones producidas en terremotos y segregación por tamaño en asteroides sometidos a impactos (ver Figura 2.1.2)

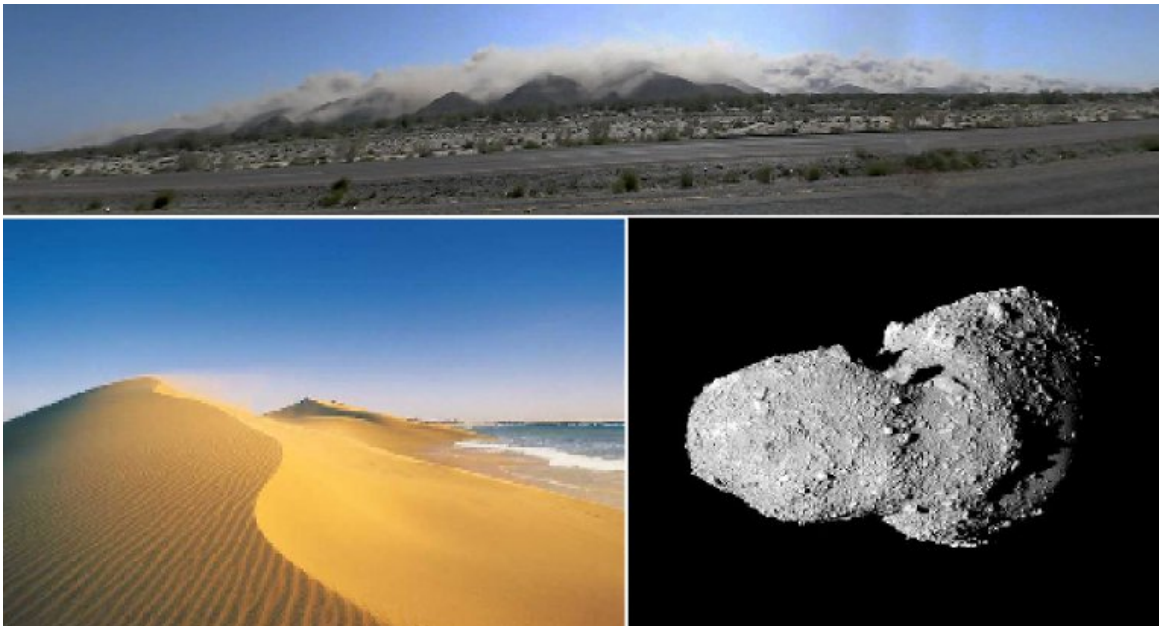


Figura 2.1.2: Superior: Nube de polvo generada en un terremoto. Inferior-Izquierda: Duna de arena. Inferior-Derecha: Asteroide Itokawa y su distribución de tamaños de rocas en su superficie.

El proceso crucial que determina el comportamiento de los granos es el mecanismo de contacto entre los mismos y con las paredes del recipiente. El objetivo de la presente experiencia es avanzar en la comprensión de los mecanismos y características de los modelos de contacto, estudiando la disipación de energía en medios granulares y su aplicación con propósitos útiles, particularmente en los casos en que las partículas interactúan con una superficie.

La interacción entre las partículas se modela como una fuerza similar a la que se hace al forzar un resorte vertical o a una esfera que puede ser deformada pero cuya deformación desaparece cuando se deja de ejercer la fuerza que le aplicamos, agregando además la viscosidad en algunos casos (modelo de Hertz).

## 2.2 Coeficiente de restitución

Durante una colisión ideal, por ejemplo una colisión elástica, toda la energía cinética de la partícula se transforma en deformación elástica durante el proceso de contacto, para luego ser reconvertida en energía cinética cuando la partícula rebota. En la práctica, siempre se pierde energía durante el proceso de contacto y rebote. Esta pérdida de energía, es efectivamente un proceso disipativo.

Según Vargas et al. (2006), existen tres mecanismos que contribuyen fundamentalmente a dicha disipación energética:

1. Energía perdida debido a las vibraciones de la superficie (ondas superficiales y volumétricas), así como la vibración almacenada en la partícula luego de la colisión.
2. Energía perdida debido a la deformación plástica de la superficie que actúa como blanco y la partícula que colisiona.
3. Energía disipada debida a las características visco-elásticas de la partícula y la superficie.

Independientemente del tipo de materiales involucrados, para una colisión, **el coeficiente de restitución  $\varepsilon$  se define como la relación entre la velocidad de la partícula después de la colisión  $v_f$  y antes de la colisión  $v_i$** , como se muestra en la Ecuación.2.2.1

$$\varepsilon = \frac{v_f}{v_i} \quad (\text{Ec. 2.2.1})$$

Para relacionar el coeficiente de restitución con el tiempo entre rebotes, asumimos que la resistencia del aire es despreciable y que dicho coeficiente es independiente de la velocidad de impacto. Observar que a partir de la Ecuación 2.2.1) sabemos que para el j-ésimo rebote se cumple:

$$\varepsilon v_{j-1} = v_j \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (\text{Ec. 2.2.2})$$

La Ecuación 2.2.2 es una relación de recurrencia en la cual puede sustituirse nuevamente  $\varepsilon v_{j-2} = v_{j-1}$ , y así sucesivamente hasta llegar a  $v_0$  obteniendo:

$$\varepsilon^N v_0 = v_N \quad (\text{Ec.2.2.3})$$

La Ecuación 2.2.3 se obtiene a partir del modelo de Bernstein (1977), donde  $N$  es el número total de rebotes de la partícula,  $v_0$  es la velocidad justo antes del primer impacto y  $v_N$  es la velocidad justo después del impacto número  $N$ .

El movimiento de la partícula entre rebotes sucesivos se puede considerar como una trayectoria de un proyectil lanzado con velocidad vertical. Consideremos  $t_j$  el tiempo transcurrido entre impactos entre el impacto  $j$  y el  $j + 1$ . Si,  $v_j$  es la velocidad justo después del  $j$ -ésimo impacto y  $g = 9.81\text{m/s}^2$  es la aceleración de la gravedad, tenemos:

$$t_j = \frac{2v_j}{g} \quad (\text{Ec. 2.2.4})$$

Sustituyendo la Ecuación 2.2.2) en la 2.2.4) y aplicando la relación de recurrencia para los  $N$  rebotes obtenemos:

$$t_j = \varepsilon^N \frac{2v_0}{g} \quad (\text{Ec. 2.2.5})$$

La Ecuación 2.2.5 es la función que calcula el tiempo transcurrido entre rebotes en función del número de rebote que se trate. Para cada pareja de valores  $(N; t_N)$  medida experimentalmente, es posible deducir un valor del coeficiente de restitución. Pero dado que tenemos información de muchos rebotes haremos un ajuste lineal por el método de mínimos cuadrados para obtener un valor más certero de  $\varepsilon$ .

Aplicando logaritmo en base 10 a la Ecuación 2.2.5 y algunas propiedades del logaritmo, logramos linealizar la ecuación obteniendo:

$$\log_{10}(t_N) = N \log_{10}(\varepsilon) + \log_{10}\left(\frac{2v_0}{g}\right) \quad (\text{Ec. 2.2.6})$$

## TERCERA PARTE

### 3.1 Método experimental

En esta experiencia se dejarán caer esferas de diferentes materiales y tamaños sobre una superficie lisa donde se producirá el impacto. Utilizaremos un micrófono conectado a la placa de sonido de la computadora para registrar el sonido producido por los sucesivos impactos de la esfera soltada desde una altura  $h_0$  (Figura 3.1.1, izquierda)

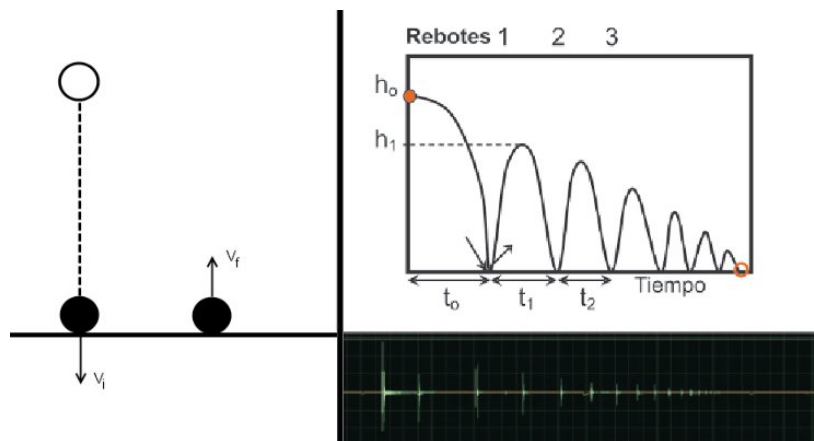


Figura 3.1.1: Izquierda: Colisión de una partícula contra una superficie. Derecha: Esquema del dispositivo experimental y gráfico de la señal de audio típica de una secuencia de rebotes

Es posible ingresar directamente los datos a MATLAB y generar la grafica correspondiente (Figura 3.1, derecha), siguiendo los comandos:

```
fs= 44100;  
y = wavrecord (3 * fs, fs, 1, 'int16');  
plot([1: 3*fs] /fs, y)  
figure(2)  
plot([2: 3*fs] /fs, diff(y))
```

donde  $f_s$  es la frecuencia de muestreo, 3 corresponde al período en segundos de la toma de datos y la diferencia entre las dos gráficas a realizar ( $y$  y  $\text{diff}(y)$ ) es simplemente para agregar un filtro que disminuya el 'ruido' de la gráfica, permitiendo distinguir mejor los picos. Se debe hacer una prueba previa a la práctica para comparar ambas figuras y ver la que resulta más definida, utilizando esta única opción del `plot` para el resto de la experiencia

Luego, en la ventana de la gráfica clicar en la opción *Tools/ DataCursor* se registrarán los valores de las coordenadas  $[x,y]$  para el primer pico (nos interesa la coordenada  $x$  correspondiente al rebote 1) y para los subsiguientes se deberá clicar botón derecho Create New Datatip. Esto permitirá tener los datos del tiempo para los rebotes sucesivos (ver Figura 3.1.2).

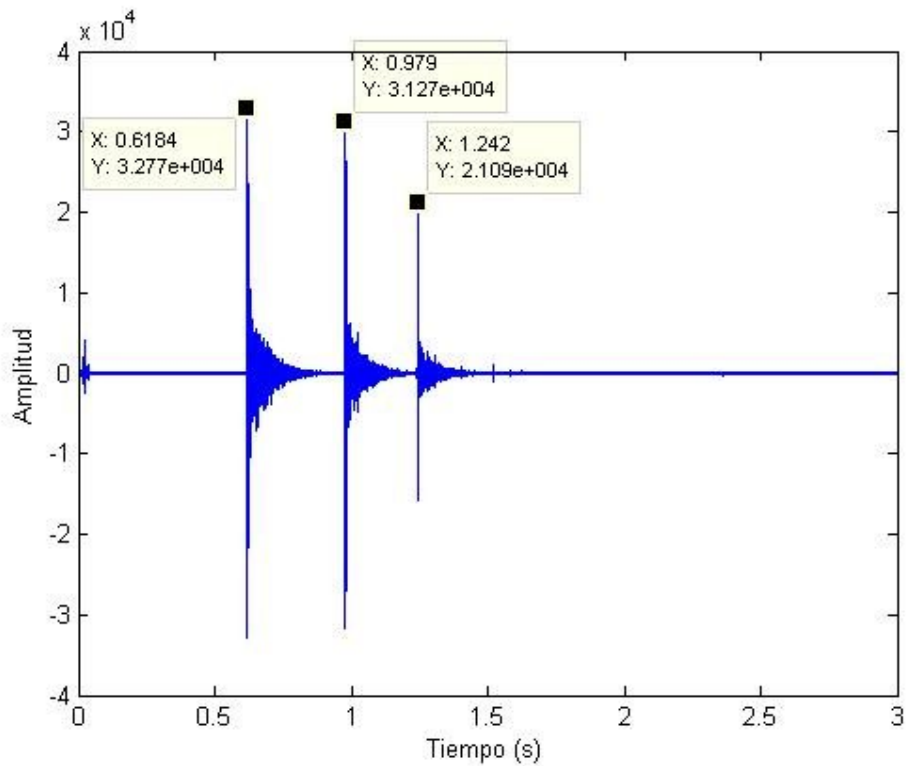


Figura 3.1.2: Ejemplo de la gráfica obtenida en MATLAB con los datos de la posición del cursor.

### 3.2 Tratamiento de datos

- ¿Qué datos debe conocer para poder calcular el coeficiente de restitución?  
Sugerencia: ver Ec. 2.2.5

---

---

---

- Para una bolita de un material/tamaño dado, realice 10 tiradas.
- Complete la Tabla 1, con los datos y unidades correspondientes para cada tirada de la bolita.

N	t	N	t	N	t	N	t	N	t
N	t	N	t	N	t	N	t	N	t

Tabla 1.

- ¿Qué tipo de ajuste se realiza en la Ec. 2.2.6? ¿Cómo lo implementaría en MATLAB? Escriba el comando y justifique los parámetros utilizados en el mismo.

---

---

---

---

- Implementando en MATLAB el ajuste dado por la Ec. 2.2.6, se obtienen dos valores.
  - ¿Cuales son?
  - ¿Qué valores obtuvo?
  - ¿Cuál es el significado físico de los valores obtenidos? Qué le permite calcular cada uno?

---

---

---

---

- ¿Cómo calcula el valor del coeficiente de restitución  $\epsilon$ ?
- Realice las gráficas correspondientes de datos y curva de mejor ajuste para cada tirada. Sugerencia: utilizar comando `subplot`



---

---

---

---

- Obtenga  $\varepsilon$  para cada una de las tiradas y registre su valor en la Tabla 2.

$\varepsilon$

**Tabla 2.**

- Bajo la hipótesis de variable aleatoria, halle el promedio, la desviación estándar y discuta si debe ser desechado algún valor del coeficiente de correlación. Sugerencia: utilizar comandos `mean`, `std` y criterio de  $3\sigma$ .

➤

---

---

---

### 3.3 Discusión de los resultados

- ¿Bajo qué hipótesis es lineal en escala logarítmica la curva  $\log(t_N)$  vs  $N$ ?

---

---

---

---

- ¿Hay dependencia del coeficiente de restitución respecto al tamaño de las esferas del mismo material?

---

---

- 
- 
- Para el caso de esferas viscoelásticas se ha hallado una relación entre  $\epsilon$  y  $v$  como indica la Ecuación 3.3.1 a través del modelo propuesto por Kuwabara & Kono, 1987

$$\epsilon = 1 - \frac{C}{R} v^{1/5} \quad (\text{Ec.3.3.1})$$

donde  $R$  es el radio de la esfera y  $C$  es una constante.

Con este tipo de dependencia ¿se puede esperar que con el dispositivo experimental usado, se pueda determinar la validez de esta relación?

---

---

---

---

- BONUS EXTRA: Siguiendo el procedimiento de Aguiar y Laudares (2003), a partir de la experiencia anterior se puede además tener una estimación de la aceleración de la gravedad  $g$ .
- Haga el cálculo de  $g$  a partir de los resultados anteriores.
- 
- 

### 3.4 Conclusiones

Brevemente describa sus conclusiones de la Práctica

---

---

---

---

---

---

### BIBLIOGRAFÍA:

- Aguiar, C., Laudares, F., 2003, "Listening to the coefficient of restitution and the gravitational acceleration of a bouncing ball", Am. J. Phys. 71, 499-501.
- Bernstein A., 1977, "Listening to the coefficient of restitution", Am. J. Phys. 45, 41-44.
- Cundall P., Strack O., 1979, "A discrete numerical model for granular assemblies", Geotechnique, 29, 47-65.
- Kuwabara G., Kono K., 1987, "Restitution Coefficient in a Collision between Two Spheres", Japanese J. Appl. Phys., 26, 1230-1233.
- Kudrolli. A., 2004, "Size separation in vibrated granular matter" , Rep. Prog. Phys. 67 209-247.
- Vargas W., Pineda L., Murcia J. C., 2006, "Impacto inelástico de una partícula sobre una superficie", Ciencia e Ingeniería Neogranadina, Vol. 16, N° 1, 80-91.