

PRÁCTICA 1 – CTE I 2016

INTRODUCCIÓN AL LABORATORIO

B. TRATAMIENTO DE DATOS Y ERRORES, ESTUDIO EXPERIMENTAL DE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD Y LINEALIZACIÓN

1. Introducción

En la física, como en cualquier ciencia experimental, los fenómenos que se analizan deben poder observarse y medirse. Estas medidas se presentan bajo la forma de números que expresan el valor de determinadas magnitudes y lo que esperamos de ellos es que nos permitan confirmar o no un modelo, elaborar un nuevo modelo, desarrollar un trabajo tecnológico, etc.

Al medir verificamos que no se obtienen los resultados deseados en forma tan directa. La medida está sujeta a errores que no siempre podemos eliminar pues son propios del proceso de medición. Por otra parte, la magnitud medida puede tener un carácter esencialmente estadístico por lo que no podemos hablar de valor exacto de la magnitud.

Cuando queremos medir una magnitud repetimos algunas veces la observación para tener una idea del error que podemos estar cometiendo en cada medición. Sin embargo, la diferencia entre los varios datos obtenidos nos dará una aproximación al error experimental si cada observación fuera independiente de todas las otras. ¿Qué significa esto? Para que en una medida los datos sean independientes del dispositivo experimental es necesario que la obtención de determinado valor no interfiera en la obtención de cualquier otro. Para que haya una independencia completa entre las diversas observaciones, sería (en teoría) necesario que cada dato sea obtenido con un equipo diferente, por otro observador, etc. Esto es impracticable y carente de sentido desde el punto de vista experimental. Sin embargo el tema de la independencia de los datos del proceso de medición es un aspecto que el investigador debe considerar seriamente, ya que una de las características de la generación de conocimiento científico es que nuestros resultados puedan ser replicados por otros investigadores. Esto le da credibilidad a nuestro trabajo científico y lo hace objetivo.

Por estas razones, en este curso estudiaremos algunos métodos para realizar un tratamiento de datos experimentales que nos permita garantizar la calidad de la medida obtenida.

2. Proceso de Medición

Comenzaremos por analizar el proceso de medición: en él intervienen necesariamente tres objetos: el sistema objeto, el cual queremos medir; el sistema de medición, o sea el aparato con el que mediremos y por último el sistema de comparación que definiremos como unidad.

Por ejemplo, en el proceso llamado "medición de longitud" intervienen

1. El objeto cuya longitud se desea medir
2. El instrumento (por ejemplo una regla)
3. La unidad (cierta escala marcada en la regla o en cierta barra patrón)

Cada proceso de medición define lo que se llama magnitud física. Si dos procesos definen la misma magnitud física, son equivalentes.

El resultado de un proceso de medición es un número real, que se denomina valor de la magnitud, con un margen de error y las unidades correspondientes. En el ejemplo de la longitud, podemos comunicar el resultado como: 3.0 ± 0.1 cm.

Para una magnitud dada, su valor debe ser independiente del proceso particular de medición, dependiendo únicamente de la unidad elegida.

2.1. Errores Sistemáticos

Son aquellos que afectan a todos los datos por igual. Pueden ser debido a una mala calibración del instrumento de medida o un error de lectura del operador. Estos errores se llaman sistemáticos justamente porque pueden ser eliminados mediante un correcto diseño del montaje experimental. También tienen la particularidad de poder ser corregidos en la serie de medidas. Por ejemplo: si pesamos 10 veces un objeto en una balanza digital que mide en gramos y tiene como origen 1, todas las medidas van a estar alteradas por 1 gramo (la masa del objeto será siempre 1 gramo más). Si detectamos el error de la balanza, podemos restarle a todas las medidas 1 gramo.

2.2. Errores Estadísticos

Son debidos a los diferentes fenómenos de naturaleza aleatoria que ocurren dentro del experimento.

Para una discusión más profunda acerca de errores de naturaleza aleatoria ver el *Anexo I* acerca de Distribuciones de Probabilidad y Distribución Gaussiana.

2.3. Error Absoluto

Para la medida de la magnitud física X , el error absoluto ΔX es el error asignado como resultado del proceso de medición. El resultado de la medida se expresará como indica la ecuación 2.3.1 seguido de las unidades de la magnitud X (en este curso utilizaremos el sistema internacional de unidades).

$$X \pm \Delta X \quad (\text{Ecuación 2.3.1})$$

Lo que expresa la ecuación 2.3.1 es que el valor más preciso que podemos obtener de la magnitud medida pertenece al intervalo que se define en la ecuación 2.3.2.

$$X \in [X - \Delta X, X + \Delta X] \quad (\text{Ecuación 2.3.2})$$

2.4. Errores asociados al instrumento de medida.

2.4.1 Apreciación

Es una característica del instrumento de medida y se define como el intervalo más pequeño que puede registrar el instrumento. En los instrumentos de medida con escalas graduadas, la apreciación es la medida que hay entre dos marcas consecutivas de la

escala. Por ejemplo, si medimos una temperatura con un termómetro de mercurio graduado en 1/10 de grado, la apreciación del mismo será de 1/10 °C.

2.4.2 Estimación

Es una acción que tomamos frente a una medida que realizamos con un instrumento cuya escala está toda a la vista. Radica en poder subdividir aún más dicha escala (a un nivel más fino que la propia apreciación del instrumento), y así ganar precisión en la medida final. Un ejemplo de esto es lo que ocurre cuando un fiel cae en la mitad de dos intervalos consecutivos de la escala. Podemos subjetivamente dividir ese intervalo a la mitad y entonces afinar nuestra medida. La estimación siempre la realizamos subdividiendo la apreciación.

2.5. Error Relativo

Nos da una idea de la calidad de la medida. El mismo se denota como ε_x y se define como el cociente entre el error absoluto de la medida y la medida misma (Ec. 2.5.1). Si el error absoluto es menor que la medida, lo cual es esperable, el error relativo es menor que la unidad. Evidentemente en el proceso de medición se busca optimizar el resultado experimental y por lo tanto disminuir el error relativo.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta X}{X} \quad (\text{Ecuación 2.5.1})$$

2.6. Error Relativo Porcentual

Es otra forma de definir el error relativo, expresándolo en porcentaje o escala de 0 a 100, en vez de 0 a 1 como el error relativo. Se define de acuerdo a la ecuación 2.6.1.

$$\varepsilon_{x\%} = \varepsilon_x \cdot 100 \quad (\text{Ecuación 2.6.1})$$

Cuando estamos tomando datos para verificar un modelo (o un conjunto de hipótesis), podemos decir en general que si obtenemos un error menor al 10% el modelo utilizado ajusta razonablemente bien los resultados experimentales. En caso contrario será necesario realizar correcciones en el modelo. Por ejemplo, si estamos estudiando el movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas de rozamiento y consideramos un modelo que supone velocidad constante, seguramente obtendremos un porcentaje de error muy grande. En este caso hay al menos dos alternativas: o adaptamos la experiencia para eliminar el rozamiento, por ejemplo trabajamos en una mesa de aire comprimido, o adaptamos el modelo incluyendo las variaciones en la velocidad. En la práctica, en general, hay que optar por soluciones que contemplen ambas modificaciones.

2.7. ¿Cómo asignar el error a una magnitud medida?

En este punto, los criterios a seguir suelen ser muy diversos. Si se consultan cinco libros diferentes sobre errores de mediciones, probablemente se encuentren cinco criterios distintos para asignar un error a la lectura. En este curso se adoptará el siguiente criterio:

- **Instrumentos Analógicos:** Se adoptará la estimación de la lectura como el error Δx de la medida x . Por ejemplo, si se mide con un termómetro que aprecia al grado, comunicaremos una temperatura de 15 grados y medio ($T = (15.5 \pm 0.5) ^\circ\text{C}$). Si el usuario tiene mucha práctica quizá pueda estimar 1/10 de grado, entonces anotará: $T = (15.5 \pm 0.1) ^\circ\text{C}$. Si no se siente con tanta confianza, deberá estimar un poco menos (1/5 o 1/2 de grado).
- **Instrumentos Digitales:** Normalmente, los instrumentos digitales de uso masivo (cronómetros, computadora, etc) no traen explícitamente la forma de calcular el error. En vista de ello se adoptará para todos los instrumentos digitales, la apreciación del instrumento digital como el error. Por ejemplo, si se lee un valor de voltaje con un tester digital y se obtiene una lectura de 4.58 V, deberá enunciarse la medida con su error de esta forma: $V = (4.58 \pm 0.01) \text{ V}$
En el caso de los buenos testers, éstos incluyen en su manual un instructivo sobre cómo calcular el error en la lectura. Generalmente es un porcentaje de ésta, más un valor fijo. No obstante, el error calculado de esta forma afecta sólo el último dígito de la lectura (si afectaran los dos últimos dígitos habría que dudar en usar ese tester).

3. Conceptos Básicos de Probabilidad

En la Sección 2.2 definimos los errores estadísticos. Los errores estadísticos o también llamados aleatorios, aparecen como fluctuaciones al azar en los valores de mediciones sucesivas. Estas variaciones aleatorias se deben a pequeños errores que escapan al control del observador. Por ejemplo, si leemos varias veces la presión indicada por la escala de un barómetro, los valores fluctuarán alrededor de un valor medio debidos a los diferentes fenómenos de naturaleza aleatoria que ocurren dentro del experimento.

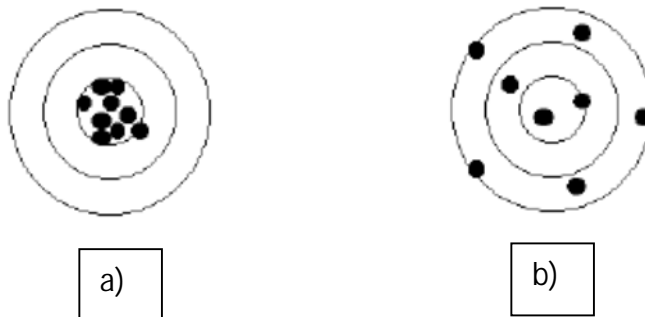


Figura 3.1

En la figura 3.1 podemos ver una representación de cómo se manifiestan los errores aleatorios en el juego del tiro al blanco. En a) prácticamente todos los dardos dan en el centro, mientras que en b) quedan distribuidos en el círculo. Si asumimos que la persona que hizo los disparos es la misma (o si fueron dos diferentes, ambos son tiradores experimentados), los resultados en b) se deben a errores aleatorios.

Para describir estos fenómenos necesitamos introducir el concepto de variable aleatoria y una descripción estadística del sistema físico.

3.1. Variable Aleatoria

Supongamos que medimos cierta magnitud física x con un instrumento extremadamente sensible, de forma que la apreciación de la lectura es despreciable en comparación al valor de la medida. En estas condiciones, es un hecho experimental que si medimos muchas veces la magnitud x en iguales condiciones del sistema, no obtendremos siempre el mismo valor x . Decimos entonces que la magnitud x es una variable aleatoria.

La probabilidad que ocurra un evento r en un total de eventos N , esta definida como el cociente entre el número de eventos favorables N_r sobre los eventos totales N .

$$P_r = \frac{N_r}{N} \quad (\text{Ecuación 3.1.1})$$

La probabilidad que ocurran el evento r o el evento s , esta dada por la suma de las probabilidades de r y s .

$$P_{ros} = P_r + P_s \quad (\text{Ecuación 3.1.2})$$

La probabilidad que ocurran el evento r y el evento s , al mismo tiempo, esta dada por el producto de sus probabilidades. Para que esto se cumpla, r y s deben ser eventos estadísticamente independientes.

$$P_{rs} = P_r \times P_s \quad (\text{Ecuación 3.1.3})$$

Ejemplo 1: Tenemos una puerta con dos cerraduras y un llavero con 10 llaves, donde una de esas llaves abre la cerradura 1 (le llamaremos llave1) y otra la cerradura 2 (le llamaremos llave2)

PROBABILIDAD DE ABRIR LA CERRADURA 1:

Casos favorables = 1 (llave 1)
Casos posibles 10 (cantidad total de llaves en el llavero)

(Ecuación 3.1.1) $\rightarrow P = 1/10 = 0.1$

PROBABILIDAD DE ABRIR LA CERRADURA 1 O LA CERRADURA 2 :

Casos favorables para la cerradura 1= 1 (llave 1)
Casos favorables para la cerradura 2= 1 (llave 2)
Casos posibles 10 (cantidad total de llaves en el llavero)

(Ecuación 3.1.2) $\rightarrow P = 1/10 + 1/10 = 0.2$

PROBABILIDAD DE ABRIR LA CERRADURA 1 Y LA CERRADURA 2 :

Casos favorables para la cerradura 1= 1 (llave 1)
Casos favorables para la cerradura 2= 1 (llave 2)
Casos posibles 10 (cantidad total de llaves en el llavero)

(Ecuación 3.1.3) $\rightarrow P = 1/10 * 1/10 = 0.01$

Notar que la probabilidad de abrir ambas cerraduras es menor que la de abrir una sola.

La probabilidad p cumple que $p \in [0,1]$; donde la probabilidad 0 corresponde al evento que nunca ocurrirá y la probabilidad 1 al que sí o sí ocurrirá. Si tenemos muchos eventos posibles, la probabilidad que ocurra alguno de ellos, corresponde con la suma de las probabilidades (visto anteriormente), por lo tanto la suma de las probabilidades de todos los eventos posibles es

$$\sum_{r=1}^N P_r = 1 \quad (\text{Ecuación 3.4})$$

Ejemplo 2: Tenemos una puerta con una cerraduras y un llavero con 1 llave, donde esa llave abre la cerradura (le llamaremos llave1)

PROBABILIDAD DE ABRIR LA CERRADURA 1:
 Casos favorables = 1 (llave 1)
 Casos posibles 1 (cantidad total de llaves en el llavero)

(Ecuación 3.1.1) $\longrightarrow P = 1/1 = 1$

Ejemplo 3: Tenemos una puerta con una cerraduras y un llavero con 1 llave, donde esa llave abre la cerradura (le llamaremos llave1). Nos confundimos y en lugar de tomar el llavero, tomamos la llave del auto.

PROBABILIDAD DE ABRIR LA CERRADURA 1:
 Casos favorables = 0 (llave del auto)
 Casos posibles 1 (cantidad total de llaves en el llavero)

(Ecuación 3.1.1) $\longrightarrow P = 0/1 = 0$

Notar que en el caso más desfavorable (abrir la puerta con la llave del auto, la probabilidad es 0, mientras que en el caso más favorable (tengo una sola llave en el llavero, que es la que abre la puerta) la probabilidad es 1.

4. Histogramas

4.1 ¿Qué es un histograma?

Una forma de representar una colección de datos obtenidos en una medida experimental es la construcción de una gráfica denominada histograma. Consideremos la

siguiente experiencia: una bolita que se mueve por una rampa. Nos interesa determinar el tiempo que demora en recorrer una cierta distancia. Para ello se tira la bolita varias veces y se determina el tiempo en cada caso. Observe que el histograma muestra gráficamente el número de veces que se obtuvo una medida entre un valor y otro (también llamado casillero o bin), o sea, es un gráfico de la acumulación de valores. En la figura (4.1.1), se muestran cuatro histogramas construidos a partir de datos obtenidos experimentalmente. En las figuras 4.1.1 (a), (b) y (c) cada serie tiene 20 muestras, en tanto que en la figura 4.1.1 (d), se adquirieron 200 muestras.

Hay varios puntos interesantes a resaltar:

- No hay diferencias esenciales en la forma en que se distribuyen los datos en cada una de las series.
- En los todos los casos los valores de la serie se distribuyen alrededor de un mismo valor $t_0 = 10.3s$. Esta distribución de datos es básicamente la misma en cada serie. Sin embargo se observa que, las tres primeras distribuciones no presentan simetría en torno a t_0 , ver figura (4.1.1).

La forma del histograma puede variar considerablemente si consideramos bins distintos. Esto es si ampliamos o reducimos el tamaño de los casilleros en el que contamos la cantidad de veces que cae una medida. Este ejemplo se ilustra en la figura (4.2.1).

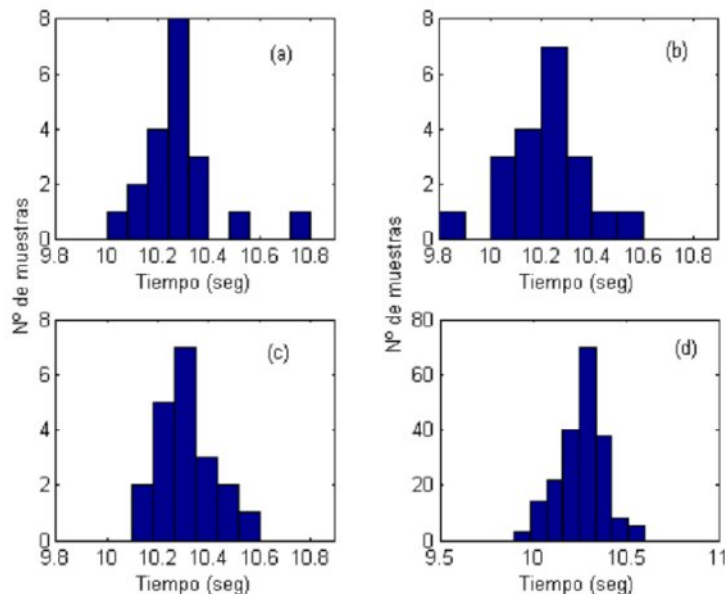


Figura 4.1.1: Para la serie de 200 datos, representada en la figura (d) se observa que la distribución tiende a ser simétrica

Intuitivamente podemos decir que rehaciendo las series de medidas experimentales, bajo las mismas condiciones, e independientemente del número de datos adquiridos, obtendremos histogramas similares, es decir similares funciones de distribución. Lo interesante de esta última observación es que nos va a permitir asociar a cada serie de datos experimentales una función de distribución que va a representar la

probabilidad de que un determinado dato de la serie pertenezca a cierto intervalo de medidas.

4.2. Histogramas en Matlab

El comando `hist`, permite realizar histogramas de una forma muy fácil. Para esto debemos definir un vector `Y` cuyos elementos sean los `N` valores de una medida `X` cualquiera.

```
Y = [1 1.1 0.9 1 1 1 0.8 1.2 1.2 1.1 1 1 1 1 0.7 0.8 0.9 0.9 0.9 1 1.1  
1.1 1 1 1]
```

El histograma correspondiente se obtiene ejecutando la siguiente tarea. Observe que por defecto Matlab utiliza 10 bins o casilleros entre el primer valor y el último.

```
hist(Y)
```

Si se quiere generar un histograma con 4 bins

```
hist(Y,4)
```

Si solamente se quiere el vector de la cantidad de veces que se obtuvieron los valores en los respectivos bins

```
N=hist(Y,4)
```

En la figura (4.2.1) se muestran diferentes histogramas para la misma serie de valores de la magnitud `X`. Observe que el aspecto de los histogramas varía considerando distintos tamaños de bins. En los histogramas de 8 y 10 bins, comienzan a generarse vacíos. Un vacío significa que entre un cierto valor y otro, no se obtuvo ninguna medida. Cuando los vacíos en un histograma aparecen uniformemente a lo largo del mismo (caso de 10 bins) significa que estamos considerando bins demasiado pequeños. En el caso contrario observe que de tomar muy pocos bins, el histograma tiende a una sola barra donde ahí estarán todas las medidas de la magnitud `X`. En el caso de la figura (4.2.1), el histograma de 6 bins resulta el más adecuado, pero esto varía con la serie de datos a considerar.

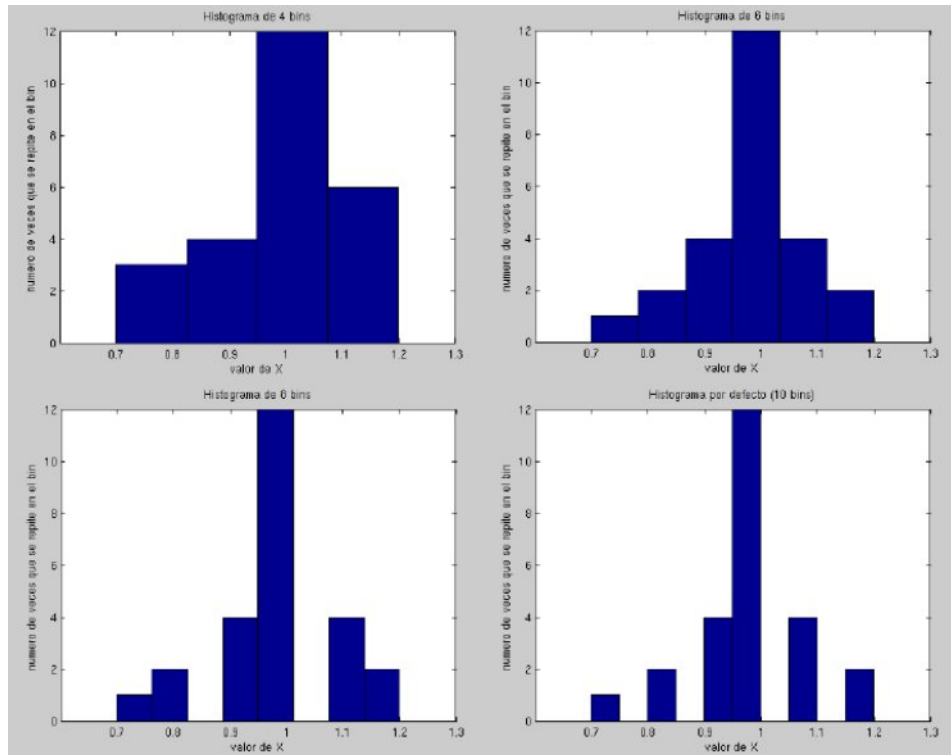


Figura 4.2.1: *Superior-Izquierda:* Histograma de 4 bins. *Superior-Derecha:* Histograma de 6 bins. *Inferior-Izquierda:* Histograma de 8 bins. *Inferior-Derecha:* Histograma de 10 bins. Matlab utiliza 10 bins por defecto si el usuario no indica el número.

4.3. Ejercicio (obligatorio)

4.3.1. DIÁMETRO DEL CRÁTER LUNAR TYCHO

En base a la figura que se adjunta, realizar dos series de medidas para la distancia del pico central al borde del cráter de manera de recorrer toda la circunferencia en sentido horario u anti-horario. El diámetro del cráter es de 85km.

4.3.2. CÁLCULO EN MATLAB

Iniciar Matlab y setear el directorio de trabajo en la carpeta de trabajo (la misma carpeta donde se encuentra la imagen del cráter). Cargar la imagen a la variable A.

```
A=imread('tycho.jpg','jpg')
```

Luego abrir la imagen como una figura en Matlab con el siguiente comando

```
imagesc(A)
```

En este momento se desplegará la imagen en una ventana de una figura. Observe que la relación de aspecto entre los ejes no es la misma, esto ocasiona que la imagen se vea ensanchada o alargada. Para evitar esto y que la imagen se visualice correctamente hay que ejecutar el siguiente comando

```
axis equal
```

Ahora la imagen esta correctamente visualizada y ya podemos comenzar con las medidas del centro del cráter y los radios. Para realizar esto definimos las coordenadas del centro con la función `ginput`.

```
[xc,yc]=ginput
```

En este instante el cursor del mouse sobre la imagen se transformará en una cruz. Para registrar las coordenadas del centro del cráter (pico central), hacemos un click en el lugar deseado. Luego para finalizar la tarea apretar la tecla enter. De manera similar, registraremos las coordenadas de varios puntos del borde del cráter, en 2 vectores `x` e `y`.

```
[x,y]=ginput
```

Luego de hacer las medidas correspondientes y apretar la tecla enter para finalizar, tendremos los valores de `xc`, `yc` y los vectores `x` e `y` con las coordenadas de los puntos del borde del cráter. Para calcular las distancias del pico central al borde aplicamos Pitágoras con la siguiente operación

```
D=sqrt((x-xc).^2+(y-yc).^2)
```

Luego el vector `D` contiene todas las distancias del borde del cráter al pico central. En la primera serie se tomarán 20 medidas a guardar en un archivo llamado `datos20.txt` y en la en la segunda serie se tomarán 50 medidas a guardar en un archivo llamado `datos50.txt`. Ambos archivos se cargaran en Matlab y se harán los histogramas correspondientes, ver sección (4). Se discutirá la forma de los mismos y se obtendrá un valor para el valor promedio de la medida en cada caso, así como el error asociado.

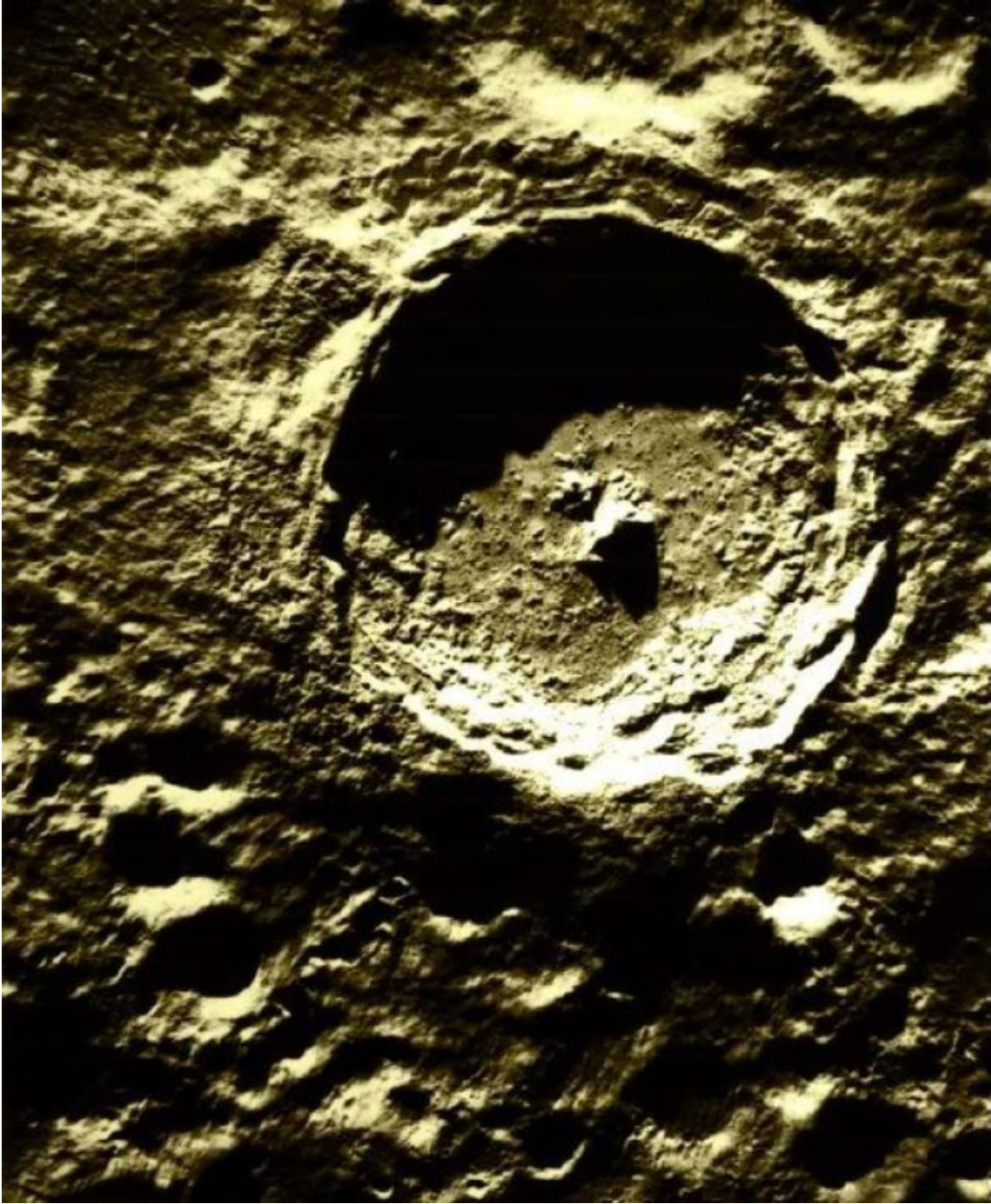


Figura 4.3.1: Cráter lunar de Tycho. Su diámetro es de 85km.

5. Parámetros estadísticos y distribución de Gauss

Como señalamos en la sección 3, el resultado de cada observación realizada en un proceso de medición depende de la acción de un gran número de factores que varían durante el proceso de medición de forma incontrolable. Por ejemplo: pequeñas corrientes de aire y vibraciones; variación de la atención del ojo del observador; variaciones de la temperatura, la humedad y la presión atmosférica; variaciones de la fricción entre partes móviles de instrumentos mecánicos; fluctuaciones del voltaje y la frecuencia de la red de alimentación eléctrica, etc. Por esta razón, al repetir muchas veces una medición obtendremos, en general, diferentes valores en cada realización, algunos de los cuales pueden o no repetirse. La experiencia demuestra que, por mucho que se trate, es imposible lograr la misma combinación de factores en cada observación repetida.

Cuando hay fluctuaciones al azar en las medidas como las descritas en el párrafo anterior, en general se supone que la distribución estadística de errores se aproxima a la denominada “**distribución Gaussiana**” o “normal”. Esta distribución se utiliza para interpretar muchos tipos de mediciones físicas, en parte debido a que las circunstancias mecánicas de muchas de éstas guardan estrecha correspondencia con los fundamentos teóricos de dicha distribución, y en parte porque la experiencia demuestra que la estadística Gaussiana proporciona una descripción razonablemente exacta de los sucesos reales.

En la sección 4.1 explicamos en qué consiste un histograma. Los histogramas pueden ser aproximados por una función continua (ecuación 5.1):

$$\Delta n = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2}} \Delta x$$

Ecuación 5.1

Si consideramos N como el número total de medidas, vemos que la ecuación 5.1 depende de dos parámetros, marcados con un círculo rojo. Estas variables son el **promedio** y la **desviación estándar** de los datos y se definen de acuerdo a las ecuaciones 5.2 y 5.3.

Promedio:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Ecuación 5.2

Desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{N}}$$

Ecuación 5.3

En forma simple, podemos plantear que el promedio es la suma de los datos dividida por el número total de medidas, mientras que la desviación estándar da una idea de cuánto se apartan los datos del valor promedio. ¿Cómo se representa esto gráficamente? El máximo de la curva de Gauss se corresponde con el promedio y el ancho de la curva se corresponde con la desviación estándar.

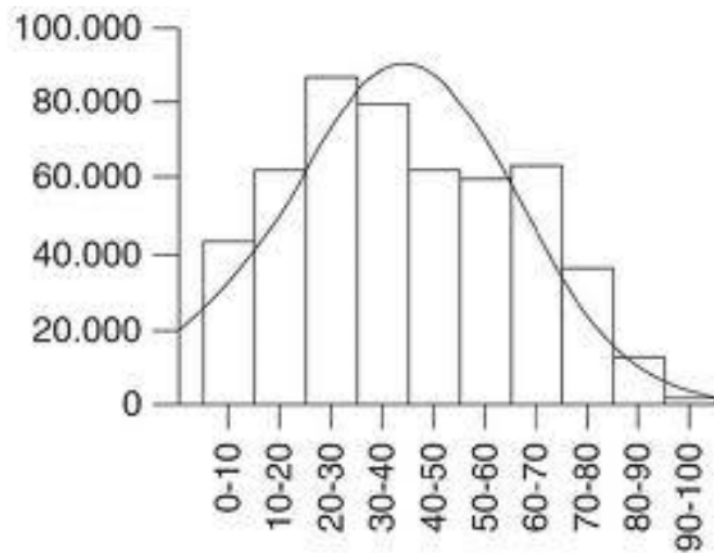


Figura 5.1

En la figura 5.1 vemos un histograma ajustado por una curva Gaussiana (ecuación 5.1), también llamada campana de Gauss por su forma.

Supongamos que tenemos tres series de medidas y para cada una construimos la curva de Gauss (Figura 5.2)

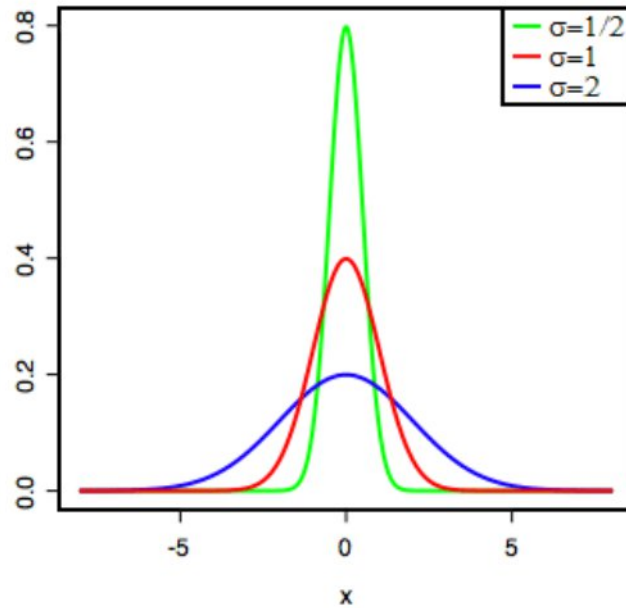
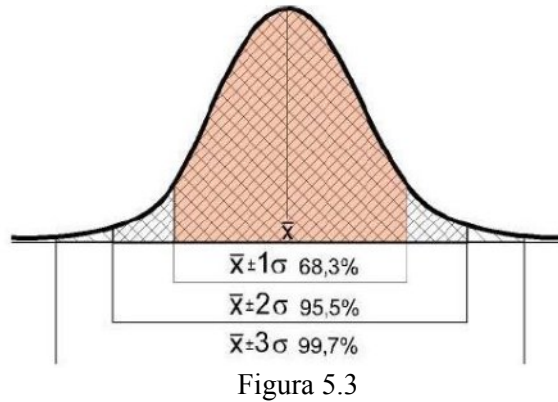


Figura 5.2.

En la figura 5.2 se ven tres series de medidas, representadas por sus respectivas curvas de Gauss (verde, rojo y azul), centradas en 0 y con tres valores de desviación estándar. La serie de medidas representada por la curva verde es más precisa (los valores se apartan menos del promedio) mientras que la azul es la menos precisa. El valor de la medida generalmente se reporta como $x \pm \sigma$, por lo cual, la desviación estándar también nos da una idea de hasta donde se justifica considerar datos que se apartan del promedio. Si efectuamos una nueva medición con nuestro equipo, ésta tiene una probabilidad del 68% de estar incluida en el intervalo como $x \pm \sigma$, (geoméricamente el área bajo la campana de Gauss comprendida en ese intervalo, es el 68% del área total). Si el resultado se reportara como $x \pm 2\sigma$ (como de hecho se podría hacer), se interpretaría diciendo que si efectuamos una medición con nuestro equipo, ésta tendría una probabilidad del 95.5 % de caer en ese intervalo (el área bajo la curva Gaussiana comprendida en este intervalo es el 95.5% del área total). Para $x \pm 3\sigma$, la probabilidad es de 99.7 % (Figura 5.3)



Por este motivo, se suele usar como criterio para descartar datos aquellos que se apartan del valor $x \pm 3\sigma$.

En el Apéndice 1 se muestran los fundamentos formales (desde el punto de vista matemático) de lo que hemos descrito en esta sección de forma más fenomenológica.

6. Relaciones causales entre dos variables

Ejemplo: Derivación de la ley de Hooke y relación lineal

La relación entre la variación de la longitud de un resorte (**l**) y la fuerza aplicada al mismo (**F**) que hoy conocemos como “Ley de Hooke” ($\mathbf{F} = -k\mathbf{l}$; donde “**k**” es la constante elástica del resorte), por más sencilla que parezca no es algo que se haya sabido desde siempre; sino que tuvo que ser deducida de alguna forma.

Determinar la relación causal entre dos variables, en este caso, fuerza y variación de longitud, es un proceso que requiere de (al menos) una serie de medidas y un cuidadoso análisis de resultados.

En este caso, la relación establecida es de tipo *lineal*, es decir, que se parece a la ecuación de una recta de tipo $\mathbf{y} = \mathbf{b}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Este tipo de relación es el más sencillo que se puede determinar, aunque no es el más común.

En el caso particular de la Ley de Hooke, y estaría representando la fuerza aplicada (**F**), **x** estaría representando cuánto se estira o comprime el resorte (**l**), $-k$ juega el papel de la pendiente **b** y **a**, la ordenada en el origen, sería **0**.

Supongamos ahora que postulamos una relación de este tipo para dos variables de las cuales tomamos una serie de medidas en el laboratorio. Nuestra meta es determinar **a** y **b**. Debido a errores experimentales (que pueden ser de origen estadístico, instrumental, etc.), si intentamos trazar una recta que una a todos los pares de puntos $(x_i; y_i)$, en seguida encontraremos que no están perfectamente alineados (ver Figura 1), por lo que nuestros coeficientes **a** y **b** estarán dados por la *recta de mejor ajuste* a todos los pares de puntos $(x_i; y_i)$.

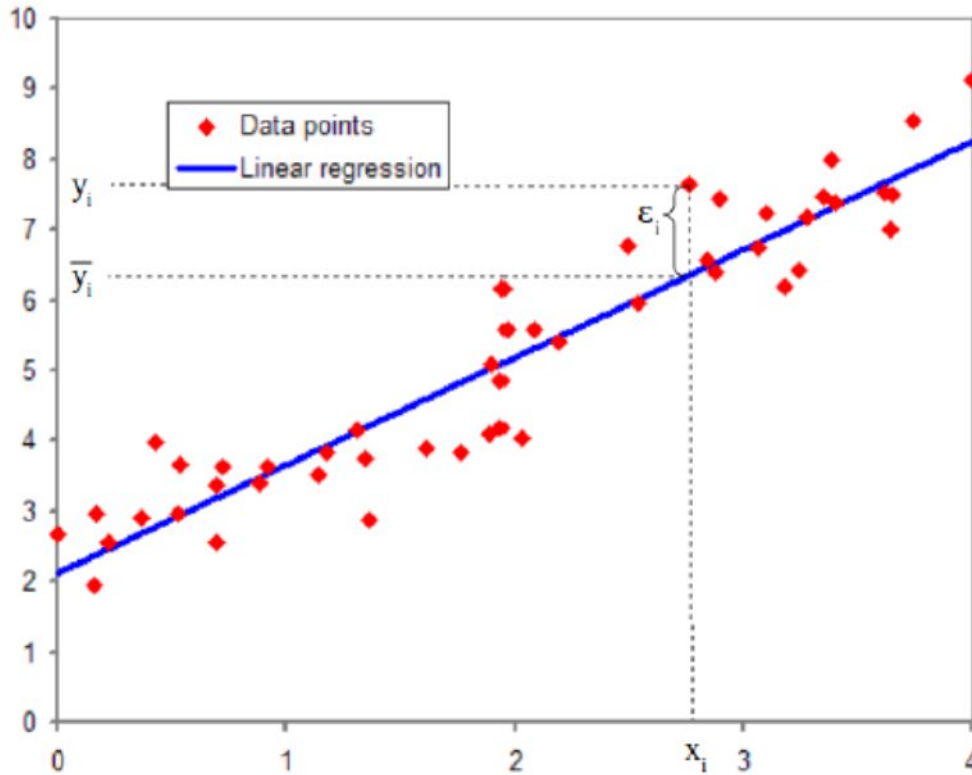


Figura 6.1: Ejemplo de un ajuste lineal por mínimos cuadrados. Observe que la diferencia de los puntos experimentales ha sido tomada en la dirección vertical, dado que hemos supuesto que no hay error en los valores del eje de las x

Vale aclarar aquí que la relación que suponemos lineal puede ser incorrecta y que en ese caso, el ajuste que hagamos va a diferir bastante de nuestros datos experimentales. Asimismo, debe tenerse en cuenta que si el ajuste resulta ser lineal, por más que sea excelente, éste no demuestra a priori una relación lineal entre ambas series, sino que será válido únicamente en la región donde fueron tomados los datos. Por ejemplo, si estiramos demasiado un resorte, llega un momento en que éste no recupera su longitud original y la relación entre fuerza aplicada y variación en longitud deja de ser lineal.

¿Cómo realizar este ajuste entonces?

Método de Mínimos Cuadrados (MMC)

Llamemos \bar{y}_i a la imagen del valor experimental x_i por la recta de mejor ajuste (cuyos coeficientes son α y β). Definamos como ϵ_i a la diferencia para cada x_i , del valor experimental y_i y el correspondiente por la recta de mejor ajuste \bar{y}_i (ver Figura 6.1).

$$\varepsilon_i = y_i - \underbrace{(bx_i + a)}_{\bar{y}_i}$$

$$\varepsilon_i = y_i - \bar{y}_i \quad \text{Ecs. 6.1 y 6.2}$$

Si nos concentramos en cada par $(x_i; y_i)$, se puede ver que esa diferencia ε_i en general no va a ser nula. Vamos a imponer además que la suma de los cuadrados de dichas diferencias sea la menor posible. Para esto es necesario derivar e igualar a cero para luego encontrar el mínimo.

Se debe recordar que estamos derivando una función de dos variables **a** y **b**, que son las incógnitas a determinar. Para esto se deben realizar derivadas parciales; es decir, primero derivar la función según **a**, como si **b**, **x_i** e **y_i** fueran constantes y luego hacer lo mismo en función de **b**.

Nuestra función es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - bx_i - a)^2 \quad \text{Ec. 6.3}$$

Desarrollando se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = b^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 + a^2 N - 2b \sum_{i=1}^N x_i y_i - 2a \sum_{i=1}^N y_i + 2ab \sum_{i=1}^N x_i + \sum_{i=1}^N y_i^2 \quad \text{Ec. 6.4}$$

Luego, para hallar el mínimo se deriva e iguala a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ecs. 6.5 y 6.6}$$

Lo que se transforma en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (**a** y **b**)

$$\begin{aligned} 2aN - 2 \sum_{i=1}^N y_i + 2b \sum_{i=1}^N x_i &= 0 \\ 2b \sum_{i=1}^N x_i - 2 \sum_{i=1}^N x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^N x_i &= 0 \end{aligned} \quad \text{Ecs. 6.7 y 6.8}$$

Cuya solución analítica es

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i x_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

Ecs. 6.9 y 6.10

Con este método, denominado Método de Mínimos Cuadrados, podemos relacionar magnitudes físicas a través de su determinación experimental.

Errores Asociados y Bondad del Ajuste

Coefficiente de Correlación de Pearson

Existe un parámetro que indica qué tan acertada fue la elección de la recta como curva de mejor ajuste. Dicho parámetro se denomina Coeficiente de Correlación de Pearson (r) y cumple que $r \in [-1,1]$, siendo los valores de mejor correlación, aquellos cercanos al 1 ó -1 y los de correlación muy pobre (o sin correlación alguna) cuando r es muy cercano a 0. El coeficiente de correlación r puede calcularse mediante la siguiente expresión

$$r = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\sqrt{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \sqrt{N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^2}}$$

Ec. 6.11

Error en el Ajuste (Δa y Δb)

Cabe también preguntarnos cual es el error asociado a los valores de a y b calculados.

Los errores

Δa y Δb pueden ser fácilmente calculados mediante estas expresiones

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{N}{N-2}\right) \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - bx_i - a)^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}}$$

$$\Delta a = \sqrt{\left(\frac{1}{N-2}\right) \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - bx_i - a)^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}}$$

Ecs. 6.12 y 6.13

Linealización

En muchos casos podemos sospechar que la relación entre variables no es lineal; sino que por ejemplo, podría ser del tipo exponencial

$$y = ae^{bx} \text{ Ec. 6.14}$$

Para confirmar esto por mínimos cuadrados, y en tal caso hallar **a** y **b**, debemos llevar esta ecuación exponencial a la de una recta o ecuación lineal. A este proceso se le llama *linealización*.

Para linealizar esta ecuación, aplicamos el logaritmo a ambos lados de la ecuación. De esta manera obtenemos la siguiente expresión

$$\ln(y) = \ln(a) + bx \text{ Ec. 6.15}$$

En ese caso, nuestras nuevas variables a graficar serán “**ln(y)**” y “**x**”, y esta gráfica sí nos dará una recta con pendiente **b** y ordenada en el origen **ln(a)**.

Mínimos cuadrados en Matlab

Una vez cargados en memoria los vectores de datos con los que se desea realizar un ajuste por mínimos cuadrados, es posible realizar el mismo de una manera muy simple. Supongamos que los vectores **x** e **y** definidos son los que aparecen a continuación.

Arbitrariamente **x** podría ser el tiempo e **y** una magnitud física cualquiera, por ejemplo, una temperatura o una velocidad.

```
x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
y = (3.2, 4.9, 7.1, 8.8, 11.3, 13.1, 14.5, 16.8, 19.7, 22.1)
```

En la ventana de comandos, ejecutamos la tarea *polyfit*

```
p=polyfit(x,y,1)
```

Esto creará una variable nueva \mathbf{p} que es un vector que contiene 2 elementos. Los mismos son el coeficiente angular y la ordenada en el origen de la recta que mejor ajusta los datos. La sintaxis de la tarea *polyfit* involucra los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , y el grado del polinomio al cual se quieren ajustar los datos.

En un caso más general la tarea puede aplicarse para encontrar la mejor parábola que ajusta los datos, o polinomios de mayor grado, simplemente el vector \mathbf{p} tendrá $n + 1$ elementos donde n es el *grado del polinomio*.

En nuestro ejemplo tenemos que $n = 1$. Luego para conocer el valor de las constantes ajustadas, simplemente nos fijamos en los valores de los elementos del vector \mathbf{p}

Bondad del Ajuste (*corrcoef*)

Finalmente podemos computar el Coeficiente de Correlación de Pearson r de la siguiente manera

```
corrcoef(x,y)
```

Este comando devolverá una matriz cuyos elementos de la diagonal serán 1. Los elementos en los extremos de la anti-diagonal contienen el valor de r .

Para este ejemplo es fácil corroborar que $r = 0.9978$. ¿Se trata de un buen ajuste?

Anexo 1

Distribuciones de Probabilidad y Distribución Gaussiana

1. Distribuciones de Probabilidad

La función que gobierna la distribución de datos en una experiencia es denominada Función de

Distribución de Probabilidad ó Densidad de Probabilidad. Veamos cómo podemos representarla. Si tomamos un número muy grande N de valores de x , veremos que cierto número dN de ellas presentan valores entre cierto x y $x + dx$. De acuerdo a la definición clásica de probabilidad, decimos que la probabilidad de obtener una medida con valor entre x y $x + dx$ está dada por la siguiente expresión

$$dP(x, x + dx) = \frac{dN}{N} \quad (1.1)$$

Cuanto mayor sea el intervalo dx (aunque siempre $dx \ll |x|$), mayor cantidad dN de medidas caerán en él.

$$\frac{dN}{N} \propto dx$$

También es obvio que el número dN de medidas comprendidas entre x y $x + dx$ no sólo depende del tamaño del intervalo dx , sino del propio valor x . La experiencia indica que para ciertos valores de x se acumulan muchas medidas dentro de un intervalo dx , en tanto que para valores de x mucho mayores o menores que el primero, hay muy pocas medidas dentro del mismo intervalo dx . De esta forma podemos escribir

$$\frac{dN}{N} = f(x)dx \quad (1.2)$$

que combinándola con la ecuación (1.1) podemos obtener

$$dP(x, x + dx) = f(x)dx \quad (1.3)$$

donde la función $f(x)$ es conocida como la Densidad de Probabilidad de la variable aleatoria x .

Puede observarse que de acuerdo a la ecuación (1.2) $f(x)$ es positiva siempre

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x$$

Luego integrando (1.2) entre $-\infty$ y $+\infty$ obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad (1.4)$$

La ecuación (1.4) establece que la probabilidad que tomemos una medida cuyo valor de nuestra variable aleatoria este comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$, es la unidad. En general, la probabilidad de obtener una medida de nuestra variable, entre dos valores cualesquiera x_1 y x_2 esta dada por

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad (1.5)$$

1.1. Valor Esperado y Desviación Estándar

1.1.1. Valor Esperado

Si bien es cierto que un número muy grande N de medidas de la magnitud x (en rigor, $N \rightarrow \infty$) arrojará diversos valores, es necesario ponerse de acuerdo para asignarle un valor determinado $\langle x \rangle$ a la magnitud medida, en el entendido de que las condiciones del sistema no se han alterado en la sucesión de mediciones hechas. A este número $\langle x \rangle$ se le denomina Esperanza ó Valor Esperado de la magnitud x y se define como

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \quad (1.6)$$

1.1.2. Desviación Estándar

Para tener una idea de cuánto se "desparraman" los valores medidos de x alrededor del valor esperado $\langle x \rangle$, se define la desviación estándar cuadrática de la variable aleatoria x como

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (1.7)$$

o en su forma integral utilizando la ecuación (1.6)

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x)dx \quad (1.8)$$

Se puede probar que si la curva de $f(x)$ es simétrica alrededor de cierto valor x_0 , entonces resulta

$$\langle x \rangle = x_0$$

1.2. Promedio y Varianza

Es claro que en la práctica es imposible obtener el valor de $\langle x \rangle$ y de σ a partir de las ecs. (1.6) y (1.8) por las siguientes razones.

- Se necesita conocer la densidad de probabilidad $f(x)$ de la variable aleatoria x .
- Debemos poder construir $f(x)$ en todo su extensión para $-\infty < x < +\infty$. Para ello tendríamos que tomar infinita cantidad de mediciones de la magnitud.

Experimentalmente todo lo que podemos hacer es tomar un conjunto finito o discreto de valores N valores de x : $\{x_1; x_2; \dots; x_N\}$. Este conjunto constituye una muestra de todo el universo de valores de x . Con estos datos debemos tratar de estimar los valores de la esperanza $\langle x \rangle$ y la dispersión estándar σ .

1.2.1. Promedio

Para la muestra de N valores, podemos definir el valor medio, o la media del conjunto, como el número:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.9)$$

La mejor estimación que tenemos del valor verdadero de la medida, es el promedio \bar{x} de la muestra.

En la práctica el promedio \bar{x} coincidiría con $\langle x \rangle$ si fuésemos capaces de tomar infinita cantidad de mediciones. Esta es la razón por la cual, en Física, se toma el promedio de la serie de medidas como el valor verdadero de la magnitud medida.

1.2.2. Varianza

Igualmente podemos definir un parámetro que nos de una medida de la dispersión de los N valores en torno a la media \bar{x} . Llamamos Varianza ó Dispersión Cuadrática de la muestra al número:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.10)$$

Se puede demostrar que la mejor estimación que se tiene de la varianza es

$$\langle s^2 \rangle = \frac{N-1}{N} \sigma^2 \quad (1.11)$$

1.3. Error en el Promedio

La media \bar{x} y la dispersión s de una muestra también son variables aleatorias. Pues si tomamos una nueva muestra de valores, sin duda obtendremos otro conjunto de $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_N\}$ diferente del anterior $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Esto nos dará, en general, otra media \bar{x}' y otra dispersión s' . Este valor del promedio, que no es exactamente $\langle x \rangle$, está entonces afectado de un error que es necesario especificar. Podemos calcular entonces la desviación estándar alrededor del valor esperado $\langle x \rangle$. En lugar de σ utilizaremos E para

indicar la desviación estándar del promedio, y lo llamamos *Error en el Promedio*. Se puede demostrar que

$$E^2 = \langle (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (1.12)$$

$$E^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 f(x) dx \quad (1.13)$$

y utilizando la ecuación (1.9) llegamos a que

$$E^2 = \langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle) \right)^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \langle \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

Operando se obtiene una relación entre el Error en el Promedio y la Desviación Estándar

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (1.14)$$

Esta es la expresión del error o desviación estándar del promedio \bar{x} de una serie de N medidas, con respecto a su valor esperado $\langle x \rangle$. Si bien podemos calcular fácilmente \bar{x} con la serie de N medidas, no podemos aún calcular el error E , puesto que no sabemos cómo estimar la desviación estándar σ .

Utilizando la ec. (1.11), se puede demostrar que

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.15)$$

Analicemos las ecs. (1.14) y (1.15) en detalle. En primer lugar, notemos que la definición de la desviación estándar σ es independiente del número de medidas adquiridas. Recordemos que representa la dispersión de las medidas en torno al valor más probable de la magnitud medida. En cambio, el error del promedio E depende del número de medidas. Notemos que si tomamos un número suficientemente grande de medidas podemos hacer que $E \rightarrow 0$. ¿Esto tiene sentido desde el punto de vista experimental? Evidentemente no tiene sentido de hablar de un error que tiende a cero. No olvidemos que, más allá de la matemática, todo el formalismo desarrollado debe ser aplicado a un proceso de medición, para el cual utilizamos instrumentos que tienen una cierta apreciación. ¿Qué significa esto? Que la apreciación del instrumento utilizado es la cota inferior para el error del promedio. A partir de allí podemos estimar cual es el máximo número de medidas que tiene sentido tomar. Finalmente veamos cómo expresar el resultado de la medición realizada. Sea $\bar{\chi}$ la mejor estimación del valor verdadero de la magnitud y $\bar{\sigma}$ la mejor estimación de la desviación estándar. Entonces:

$$\bar{\chi} \pm \bar{\sigma}$$

2. Distribución Normal o Gaussiana

La densidad de probabilidad Normal o Gaussiana es una función de variable continua. Este tipo de funciones permite modelar un sin número de sistemas físicos. En este curso aplicaremos la función Gaussiana para estudiar la distribución de una serie de datos en torno al valor esperado. Consideramos la siguiente función

$$f(x) = Ae^{\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \quad A > 0 \quad (2.1)$$

La definición de la ecuación (2.1) satisface las condiciones para ser considerada una distribución de probabilidad

- $f(x)$ es definida positiva
- $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm \infty$
- La integral en todo su dominio es igual a la unidad, para esto la constante A debe tener el siguiente valor.

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} dx$$

donde la integral de la función Gaussiana es conocida

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} dx = \sigma_0 \sqrt{2\pi}$$

Por lo tanto se cumple que

$$A = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \quad (2.2)$$

Entonces podemos definir la siguiente Función de Distribución Gaussiana ó Normal.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right)} \quad (2.3)$$

Se puede demostrar en forma muy sencilla que x_0 corresponde al máximo de la curva y σ_0 a los puntos de inflexión. La experiencia indica que cuando medimos una magnitud x con un instrumento de muy pequeña apreciación y realizamos un número N muy grande medidas todas en las mismas condiciones, la densidad de probabilidad que mejor ajusta la distribución de datos en torno del valor esperado en la función de densidad Gaussiana. En este caso x_0 representa el valor esperado x y σ_0 la desviación estándar.

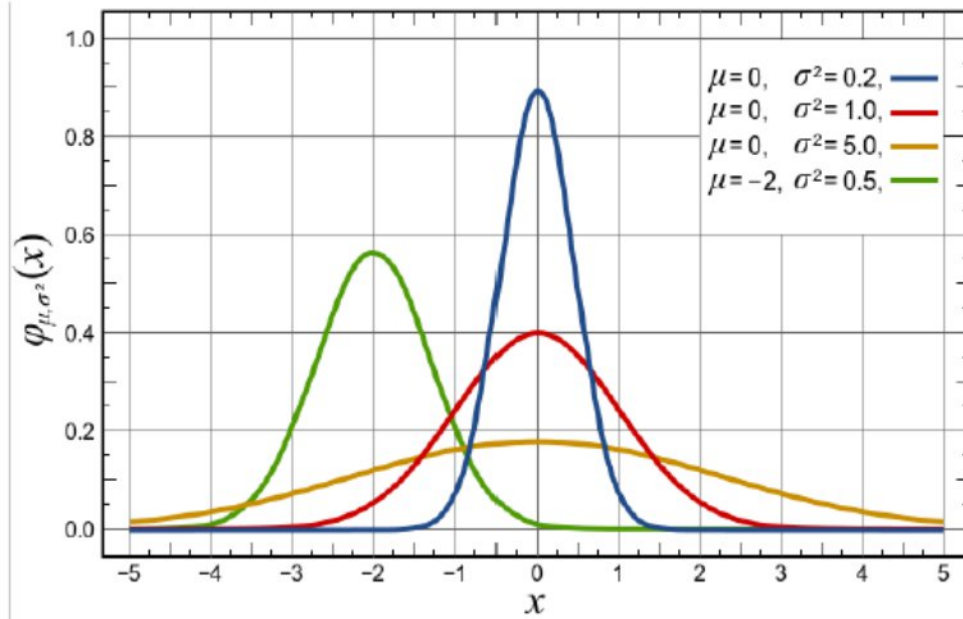


Figura 2.1: En esta figura se muestran varias funciones de distribución normales o Gaussianas ϕ , con distintos valores de σ y valores centrales μ .

Hemos determinado entonces la forma concreta de la distribución de probabilidad $f(x)$ de una variable aleatoria x . Esto significa que podemos aplicar la ec. (1.5) para calcular directamente la probabilidad de obtener algún valor de x dentro de un intervalo $[x_1, x_2]$ arbitrario. Es decir:

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{\left(\frac{-(x-x_o)^2}{2\sigma_o^2}\right)} dx \quad (2.4)$$

El problema que presenta la ec. (2.4) es que no tiene solución analítica por no existir ninguna función elemental que sea primitiva de la ec. (2.1). Existen al menos dos soluciones posibles para este problema. La clásica que consiste en utilizar tablas de la integral de probabilidad, como la que aparece en "Manual de matemáticas" (Bronshtein). Esto es un proceso engorroso que implica realizar una serie de cambios de variable y consideraciones diversas sobre los intervalos para poder utilizar dichas tablas. La segunda alternativa que consideraremos en este curso es realizar una integración numérica mediante el programa Matlab. Para ello utilizaremos la función `quad`, que realiza la integración numérica de funciones.

2.1. Interpretación de la Desviación Estándar

Se puede demostrar fácilmente, utilizando la ec. (2.4), que la probabilidad de que un dato de la serie de medidas pertenezca al intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ es de ~ 0.6826 . Esto significa que un dato cualquiera tiene una probabilidad de 68% de diferir en σ del valor esperado. Es claro que este hecho no es una propiedad intrínseca de σ , sino que se debe a que la distribución utilizada es Gaussiana.